Разбор заданий открытой городской олимпиады «Пять с плюсом»

по математике

для 6 класса

2022/23 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

Задание № 1.1

Условие:

Софья, Тимур, Роберт и Лера катаются на белом велосипеде, красных роликах, белом самокате и зелёном самокате (каждый — на чём-то одном). У Леры и Роберта одинаковые средства передвижения, а у Тимура и Леры — разные, но одного цвета. На чём катается Тимур?

Ответ:

- ✓ Белый велосипед
- o Красные ролики
- o Белый самокат
- o Зелёный самокат

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Так как у Леры и Роберта одинаковые средства передвижения, то у них самокаты. У Тимура и Леры средства одного цвета, то есть белые. Значит, у Леры белый самокат, у Роберта зелёный самокат, у Тимура белый велосипед, у Софьи красные ролики.

Задание № 1.2

Условие:

Софья, Тимур, Роберт и Лера катаются на белом велосипеде, красных роликах, белом самокате и зелёном самокате (каждый — на чём-то одном). У Леры и Роберта одинаковые средства передвижения, а у Тимура и Леры — разные, но одного цвета. На чём катается Софья?

Ответ:

- o Белый велосипед
- ✓ Красные ролики
- o Белый самокат
- o Зелёный самокат

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 1.1.

Задание № 1.3

Условие:

Софья, Тимур, Роберт и Лера катаются на белом велосипеде, красных роликах, белом самокате и зелёном самокате (каждый — на чём-то одном). У Леры и Роберта одинаковые средства передвижения, а у Тимура и Леры — разные, но одного цвета. На чём катается Роберт?

Ответ:

- o Белый велосипед
- o Красные ролики
- o Белый самокат
- ✓ Зелёный самокат

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 1.1.

Задание № 1.4

Условие:

Софья, Тимур, Роберт и Лера катаются на белом велосипеде, красных роликах, белом самокате и зелёном самокате (каждый — на чём-то одном). У Леры и Роберта одинаковые средства передвижения, а у Тимура и Леры — разные, но одного цвета. На чём катается Лера?

Ответ:

- o Белый велосипед
- o Красные ролики
- ✓ Белый самокат
- o Зелёный самокат

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 1.1.

Задание № 2.1

Условие:

Сумма нескольких натуральных чисел равна 24, а произведение этих же чисел равно 630. Найдите эти числа, если известно, что их было 5.

Ответы запишите в любом порядке.

Ответ:

1	2	5	7	9
1	3	3	7	10

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Разложим 630 на множители: $630 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Сгруппируем эти множители так, чтобы в сумме получилось 24: $24 = 1 + 2 + 5 + 7 + 9$; или так: $24 = 1 + 3 + 3 + 7 + 10$.

Задание № 2.2

Условие:

Сумма нескольких натуральных чисел равна 30, а произведение этих же чисел равно 630. Найдите эти числа, если известно, что их было 5.

Ответы запишите в любом порядке.

Ответ:

1	1	6	7	15
1	1	5	9	14

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 2.1.

Задание № 2.3

Условие:

Сумма нескольких натуральных чисел равна 26, а произведение этих же чисел равно 630. Найдите эти числа, если известно, что их было 5.

Ответы запишите в любом порядке.

Ответ:

1	3	3	5	14

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 2.1.

Задание № 2.4

Условие:

Сумма нескольких натуральных чисел равна 28, а произведение этих же чисел равно 630. Найдите эти числа, если известно, что их было 5.

Ответы запишите в любом порядке.

Ответ:

1	2	3	7	15
1	1	7	9	10

Точное совпадение ответа — 1 балл

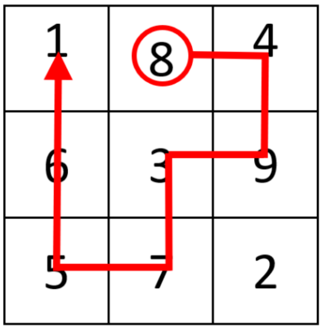
Решение по аналогии с заданием № 2.1.

Задание № 3.1

Условие:

В таблице 3 × 3 расставили цифры от 1 до 9. Маша выбирает любую клетку квадрата и начинает делать ходы в соседние по стороне клетки (дважды в одну и ту же клетку попадать нельзя). При этом она выписывает по порядку все числа, через которые проходит.

Например, для пути



получится число 84937561.

Найдите такой путь, чтобы выписанное число было наибольшим для расстановки, представленной на рисунке. В ответ запишите это число.

1	8	4
6	3	9
5	7	2

Ответ: 573618492

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Если обойти все клетки доски, то получится девятизначное число, которое, будет больше любого восьмизначного. Покрасим доску в шахматную раскраску как на рисунке ниже. Заметим, что после каждого хода цвет клетки меняется, то есть из черной клетки можно попасть только в белую, а из белой – только в черную. Так как на доске 5 белых и 4 черных клеток, начинать надо с белой клетки, иначе пройти 5 белых клеток не удастся.

1	8	4
6	3	9
5	7	2

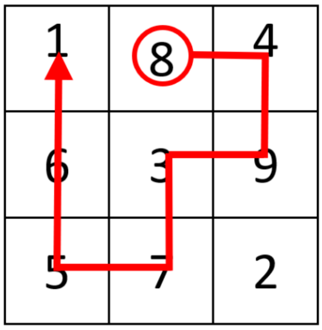
Поэтому надо начать с самой большой "белой" цифры – цифры 5, перейти к её наибольшему соседу, цифре 7, а потом к её наибольшему соседу, цифре 3. Затем придётся перейти к клетке 6 – иначе обойти всю доску не получится. Далее путь единственен: 1-8-4-9-2.

Задание № 3.2

Условие:

В таблице 3 × 3 расставили цифры от 1 до 9. Маша выбирает любую клетку квадрата и начинает делать ходы в соседние по стороне клетки (дважды в одну и ту же клетку попадать нельзя). При этом она выписывает по порядку все числа, через которые проходит.

Например, для пути



получится число 84937561.

Найдите такой путь, чтобы выписанное число было наибольшим для расстановки, представленной на рисунке. В ответ запишите это число.

1	9	8
6	3	4
7	5	2

Ответ: 893425761

Точное совпадение ответа — 1 балл

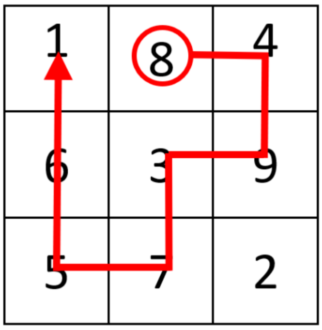
Решение по аналогии с заданием № 3.1.

Задание № 3.3

Условие:

В таблице 3 × 3 расставили цифры от 1 до 9. Маша выбирает любую клетку квадрата и начинает делать ходы в соседние по стороне клетки (дважды в одну и ту же клетку попадать нельзя). При этом она выписывает по порядку все числа, через которые проходит.

Например, для пути



получится число 84937561.

Найдите такой путь, чтобы выписанное число было наибольшим для расстановки, представленной на рисунке. В ответ запишите это число.

1	6	4
9	3	8
7	5	2

Ответ: 793528461

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 3.1.

Задание № 4.1

Условие:

В волшебном лесу между домиками Кеши, Тучки и Лисички проложены дорожки так, что от любого домика можно добраться до любого другого напрямую. От домика Кеши до домика Тучки напрямую на 200 метров ближе, чем через домик Лисички. От Кеши до Лисички — на 300 метров ближе, чем через Тучку. Найдите расстояние между домиками Тучки и Лисички.

Ответ: 250

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Обозначим домик Кеши буквой К, домик Тучки – буквой Т, домик Лисички – буквой Л. Длина маршрута К-Т на 200 метров меньше длины маршрута К-Л-Т, а длина маршрута К-Л на 300 метров меньше длины маршрута К-Т-Л. Значит, длина маршрута Т-Л-К-Т-Л равна сумме длины маршрута Л-К-Т и 500 метров. При этом второй маршрут отличается от первого на две длины маршрута Т-Л. Значит, расстояние между домиками Тучки и Лисички равно $500 : 2 = 250$ метров.

Задание № 4.2

Условие:

В волшебном лесу между домиками Кеши, Тучки и Лисички проложены дорожки так, что от любого домика можно добраться до любого другого напрямую. От домика Кеши до домика Тучки напрямую на 300 метров ближе, чем через домик Лисички. От Кеши до Лисички — на 400 метров ближе, чем через Тучку. Найдите расстояние между домиками Тучки и Лисички.

Ответ: 350

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 4.1.

Задание № 4.3

Условие:

В волшебном лесу между домиками Кеши, Тучки и Лисички проложены дорожки так, что от любого домика можно добраться до любого другого напрямую. От домика Кеши до домика Тучки напрямую на 300 метров ближе, чем через домик Лисички. От Кеши до Лисички — на 500 метров ближе, чем через Тучку. Найдите расстояние между домиками Тучки и Лисички.

Ответ: 400

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 4.1.

Задание № 4.4

Условие:

В волшебном лесу между домиками Кеши, Тучки и Лисички проложены дорожки так, что от любого домика можно добраться до любого другого напрямую. От домика Кеши до домика Тучки напрямую на 200 метров ближе, чем через домик Лисички. От Кеши до Лисички — на 400 метров ближе, чем через Тучку. Найдите расстояние между домиками Тучки и Лисички.

Ответ: 300

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 4.1.

Задание № 5.1

Условие:

Петя загадал 10 последовательных целых положительных чисел и назвал Васе какие-то девять из них. Помогите Васе отгадать первое (самое маленькое) загаданное число, зная, что сумма названных чисел равна 2023.

Ответ: 220

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Пусть x – наименьшее из написанных чисел. Обозначим через x + y вычеркнутое число, y – целое число от 0 до 9. Тогда $x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) + (x + 5) + (x + 6) + (x + 7) + (x + 8) + (x + 9) - (x + y) = 2023$, то есть $9x = 1978 + y$. $1978 + y$ делится на 9 только при y = 2. Значит, $x = 1980 : 9 = 220$.

Задание № 5.2

Условие:

Петя загадал 10 последовательных целых положительных чисел и назвал Васе какие-то девять из них. Сумма названных чисел оказалась равна 2023. Какое число Петя **не** назвал?

Ответ: 222

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 5.1.

Задание № 5.3

Условие:

Петя загадал 10 последовательных целых положительных чисел и назвал Васе какие-то девять из них. Помогите Васе отгадать последнее (самое большое) загаданное число, зная, что сумма названных чисел равна 2023.

Ответ: 229

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 5.1.

Задание № 6.1

Условие:

В мастерской находятся 12 Фиксиков и Кработов. Фиксики всегда говорят правду, а Кработов запрограммировали так, что они всегда врут.

Один из них сказал: *«Здесь нет ни одного Фиксика».*

Второй заявил: *«Здесь не более одного Фиксика».*

Третий сказал, что Фиксиков не более двух и так далее до двенадцатого, который заявил, что Фиксиков не более одиннадцати. Определите по этим утверждениям, сколько Фиксиков в мастерской.

Ответ: 6

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Заметим, что Фиксиков может быть шесть, когда первые шестеро Креботы, а остальные – Фиксики. Докажем, что Фиксиков не может быть как меньше, так и больше шести. Если бы их было 5 или меньше, то правду сказали бы по крайней мере 7 говорящих – с 6 по 12, что противоречит тому, что Фиксиков меньше шести. Если бы Фиксиков было 7 или больше, то тогда получается, что первые семь человек солгали, то есть Кработов по крайней мере 7, но 7+7 уже больше двенадцати присутствующих в мастерской – противоречие.

Задание № 6.2

Условие:

В мастерской находятся 14 Фиксиков и Кработов. Фиксики всегда говорят правду, а Кработов запрограммировали так, что они всегда врут.

Один из них сказал: *«Здесь нет ни одного Фиксика».*

Второй заявил: *«Здесь не более одного Фиксика».*

Третий сказал, что Фиксиков не более двух и так далее до четырнадцатого, который заявил, что Фиксиков не более тринадцати. Определите по этим утверждениям, сколько Фиксиков в мастерской.

Ответ: 7

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 6.1.

Задание № 6.3

Условие:

В мастерской находятся 10 Фиксиков и Кработов. Фиксики всегда говорят правду, а Кработов запрограммировали так, что они всегда врут.

Один из них сказал: *«Здесь нет ни одного Фиксика».*

Второй заявил: *«Здесь не более одного Фиксика».*

Третий сказал, что Фиксиков не более двух и так далее до десятого, который заявил, что Фиксиков не более девяти. Определите по этим утверждениям, сколько Фиксиков в мастерской.

Ответ: 5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 6.1.

Задание № 7.1

Условие:

В голосовании за самого милого котика участвовало три кандидата: Пушок, Муся и Клёпа. После предварительного подсчёта голоса распределились следующим образом: за Пушка проголосовало 20 % зрителей, за Мусю — 35 %, а остальные — за Клёпу. После подсчёта всех голосов оказалось, что все оставшиеся голоса были отданы за Клёпу. В итоге Пушок набрал 16 % голосов. Сколько набрала Муся?

Ответ: 28

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Обозначим за x количество голосов, отданных за Пушка, а за y – количество голосов, отданных за Мусю. Так как за Пушка проголосовало 20%, а за Мусю – 30%, то после предварительного подсчета 1% составлял $\frac{x}{20} = \frac{y}{35}$, откуда $\frac{y}{x} = \frac{7}{4}$. После подсчета всех голосов 1% стал составлять $\frac{x}{16}$. Значит, за Мусю было отдано $\frac{y \cdot 16}{x} = \frac{y}{x} \cdot 16 = \frac{7}{4} \cdot 16 = 28\%$ голосов.

Задание № 7.2

Условие:

В голосовании за самого милого котика участвовало три кандидата: Пушок, Муся и Клёпа. После предварительного подсчёта голоса распределились следующим образом: за Пушка проголосовало 21 % зрителей, за Мусю — 36 %, а остальные — за Клёпу. После подсчёта всех голосов оказалось, что все оставшиеся голоса были отданы за Клёпу. В итоге Пушок набрал 14 % голосов. Сколько набрала Муся?

Ответ: 24

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 7.1.

Задание № 7.3

Условие:

В голосовании за самого милого котика участвовало три кандидата: Пушок, Муся и Клёпа. После предварительного подсчёта голоса распределились следующим образом: за Пушка проголосовало 27 % зрителей, за Мусю — 33 %, а остальные — за Клёпу. После подсчёта всех голосов оказалось, что все оставшиеся голоса были отданы за Клёпу. В итоге Пушок набрал 18 % голосов. Сколько набрала Муся?

Ответ: 22

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием №7.1.

Задание № 8.1

Условие:

У чудо-сундука есть 10 замков. Все замки закрыты. У Буратино есть 10 чудо-ключей. Один из этих ключей может открыть один любой замок, после чего исчезнет. Другой ключ может открыть любой замок, кроме какого-то одного, но тоже исчезает после первого использования. Третий ключ не может открыть какие-то два замка и так далее. Десятый ключ открывает только какой-то один замок. Каждый ключ исчезает после того, как откроет один замок; неизвестно, какие ключи к каким замкам подходят; если ключ не подходит к замку, то ничего не происходит. Буратино начал использовать ключи в случайном порядке. В какой-то момент оказалось, что ни один из оставшихся ключей не может открыть ни один из оставшихся замков. Какое наибольшее количество ключей могло остаться?

Ответ: 5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Пронумеруем ключи числами от 1 до 10 в порядке возрастания количества замков, которые они открывают. Пронумеруем замки числами от 1 до 10 в порядке возрастания количества ключей, которыми их можно открыть (замок №1 можно открыть только одним ключом, замок №10 – всеми). Заметим, что ключ №10 открывает все замки; ключ №9 – все, кроме первого замка; ключ №8 – все кроме первого и второго, и так далее, ключ №1 может открыть только замок №10. Назовем ключи с 6 по 10 универсальными, замки с 1 по 5 – надёжными, замки с 6 по 10 – ненадёжными. Заметим, что у Буратино могло остаться пять ключей. Если он использовал все универсальные ключи на ненадёжных замках, то ни один из оставшихся ключей не сможет открыть ни один из надёжных замков. Предположим, что у Буратино осталось не меньше 6 ключей, то есть он открыл не больше четырёх замков. Тогда остался хотя бы один универсальный ключ и хотя бы один ненадёжный замок. Но любой универсальный ключ открывает любой ненадёжный замок. Противоречие.

Задание № 8.2

Условие:

У чудо-сундука есть 12 замков. Все замки закрыты. У Буратино есть 12 чудо-ключей. Один из этих ключей может открыть один любой замок, после чего исчезнет. Другой ключ может открыть любой замок, кроме какого-то одного, но тоже исчезает после первого использования. Третий ключ не может открыть какие-то два замка и так далее. Двенадцатый ключ открывает только какой-то один замок. Каждый ключ исчезает после того, как откроет один замок; неизвестно, какие ключи к каким замкам подходят; если ключ не подходит к замку, то ничего не происходит. Буратино начал использовать ключи в случайном порядке. В какой-то момент оказалось, что ни один из оставшихся ключей не может открыть ни один из оставшихся замков. Какое наибольшее количество ключей могло остаться?

Ответ: 6

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 8.1.

Задание № 8.3

Условие:

У чудо-сундука есть 14 замков. Все замки закрыты. У Буратино есть 14 чудо-ключей. Один из этих ключей может открыть один любой замок, после чего исчезнет. Другой ключ может открыть любой замок, кроме какого-то одного, но тоже исчезает после первого использования. Третий ключ не может открыть какие-то два замка и так далее. Четырнадцатый ключ открывает только какой-то один замок. Каждый ключ исчезает после того, как откроет один замок; неизвестно, какие ключи к каким замкам подходят; если ключ не подходит к замку, то ничего не происходит. Буратино начал использовать ключи в случайном порядке. В какой-то момент оказалось, что ни один из оставшихся ключей не может открыть ни один из оставшихся замков. Какое наибольшее количество ключей могло остаться?

Ответ: 7

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 8.1.

Задание № 8.4

Условие:

У чудо-сундука есть 16 замков. Все замки закрыты. У Буратино есть 16 чудо-ключей. Один из этих ключей может открыть один любой замок, после чего исчезнет. Другой ключ может открыть любой замок, кроме какого-то одного, но тоже исчезает после первого использования. Третий ключ не может открыть какие-то два замка и так далее. Шестнадцатый ключ открывает только какой-то один замок. Каждый ключ исчезает после того, как откроет один замок; неизвестно, какие ключи к каким замкам подходят; если ключ не подходит к замку, то ничего не происходит. Буратино начал использовать ключи в случайном порядке. В какой-то момент оказалось, что ни один из оставшихся ключей не может открыть ни один из оставшихся замков. Какое наибольшее количество ключей могло остаться?

Ответ: 8

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 8.1.