УПРАВЛЕНИЕ ПО ОБРАЗОВАНИЮ И НАУКЕ АДМИНИСТРАЦИИ ГОРОДА СОЧИ
Муниципальное бюджетное учреждение дополнительного образования
Центр творческого развития и гуманитарного образования города Сочи

НЕРАВЕНСТВА И РАЗНЫЕ МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Сборник заданий

Сочи • МБУ ДО ЦТРиГО г. Сочи • 2018

Рекомендовано к печати
методическим советом МБУ ДО ЦТРиГО г. Сочи
(протокол № 1 от 01.08.2018 г.)

Рецензенты:
начальник отдела сопровождения профессионального развития
педагогических и руководящих работников
МБУ Сочинского центра развития образования
Т. А. Боброва

заместитель директора по информатизации МБУ ДО ЦТРиГО г. Сочи
М. В. Кравцова

Составитель:
педагог дополнительного образования МБУ ДО ЦТРиГО г. Сочи
Н. А. Аникеев

Учимся решать неравенства: сборник заданий. – Сочи: МБУ ДО ЦТРиГО г. Сочи, 2018. – 27 с.

Представлены вариативные методы решения целых неравенств с одной переменной и неравенств высоких степеней, систем и совокупностей неравенств, неравенств, содержащих переменную под знаком модуля. А также сборник задач по предложенной теме.

Для педагогов организаций дополнительного и общего образования, реализующих программы по математике базового и профильного уровней, а также обучающихся восьмых классов.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 4

1. Решение неравенств с одной переменной ....

2. Решение систем и совокупностей неравенств с одной переменной ....

3. Метод интервалов ....

4. Решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля ....

5. Задачи ....

    5.1. Задачи по теме «Решение неравенств с одной переменной» ....

    5.2. Задачи по теме «Решение систем и совокупностей неравенств с одной переменной» ....

    5.3. Разные задачи ....

Использованная литература ....

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный сборник содержит методы и приемы решений неравенств, их систем и совокупностей, а также неравенств, содержащих переменную под знаком модуля. Подборка заданий ориентирована на обучающихся в ЦТРиГО по программе «Общая математика 7-9», второй год обучения.

Подбор заданий, как и комментарии к вариантам их решений предполагают движение обучающихся от простого к сложному, рассчитаны на развитие общих математических способностей, формирование элементов логической грамотности, углубление и расширение усвоенных ранее математических знаний и умений, на овладение различными методами решения нестандартных математических задач.

Задачник разделен на несколько частей, первые четыре из которых посвящены теоретической части и содержат большое количество примеров, к которым приведены подробные вариативные решения. Таким образом некоторые задачи решены разными способами, что способствует более глубокому пониманию предмета учащимися и повышает их шансы на успешное решение задачи на итоговой аттестации. Пятая часть содержит достаточное количество заданий для самостоятельного решения, которые расположены в соответствии с тематикой, предложенной в первых четырех частях. Задачи рассчитаны на учащихся восьмых классов.

1. РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Определение. Решением неравенства с одной переменной называется такое значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

Решением неравенства $2x - 3 < 5$ является, например, значение переменной *x* равное 2 или -7, тогда как значение 7; 4 и 10 не являются решением данного неравенства. Вообще, решить неравенство – означает найти все решения или доказать, что их нет.

Свойства числовых неравенств:

1. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$;
2. Если $a > b$, то $a + c > b + c$;
3. Если $a > b$ и $n > 0$, то $an > bn$, если $a > b$ и $n < 0$, то $an < bn$;
4. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$;
5. Если $a, b, c, d > 0$ и $a > b, c > d$, то $ac > bd$ (и, как следствие: $a^n > b^n$ для $a, b \geq 0$);
6. Если a и b $-$ числа одного знака, отличные от нуля и $a > b$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Обобщая данные свойства можно выделить несколько основных правил решения неравенств:

1. *Из одной части неравенства в другую можно переносить* ***слагаемое с противоположным знаком****;*
2. *Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и о же* ***положительное*** *число;*
3. *Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же* ***отрицательное*** *число,* ***изменив знак неравенства на противоположный****.*

Пример 1. Решите неравенство $2(x - 1) - 5(6 - 3x) < 2$

Решение. Раскроем скобки и приведем подобные:

$$2x - 2 - 30 + 15x < 2$$

$$17x - 32 < 2$$

Перенесем все свободные члены в правую часть, а члены, содержащие переменную – в левую, приведем подобные:

$$17x < 2 + 32$$

$$17x < 34$$

Разделим левую и правую части неравенства на положительное число 17:

$$x < 2$$

Ответ: $(-\infty; 2)$.

Пример 2. Решите неравенство $\frac{2x-1}{3} < \frac{5x-2}{2}$

Решение. Умножим левую и правую части неравенства на положительное число 6 (Объясните почему именно на 6):

$$\frac{2x-1}{3} \cdot 6 < \frac{5x-2}{2} \cdot 6$$

$$2(2x-1) < 3(5x-2)$$

$$4x - 2 < 15x - 6$$

$$4x - 15x < -6 + 2$$

$$-11x < -4$$

Разделим левую и правую части неравенства на отрицательное число -11 изменив знак неравенства:

$$x > \frac{4}{11}$$

Ответ: $\left(\frac{4}{11}; +\infty\right)$.

Пример 3. Решите неравенство $\frac{2x+1}{x-2} < 2$

Первый способ. Решение. Преобразуем числитель дроби так, чтобы выделить целую часть (отнимем и прибавим 4):

$$\frac{2x-4+4+1}{x-2} < 2$$

$$\frac{2(x-2)+5}{x-2} < 2$$

$$\frac{2(x-2)}{x-2} + \frac{5}{x-2} < 2$$

$$2 + \frac{5}{x-2} < 2$$

$$\frac{5}{x-2} < 0$$

Задача свелась к сравнению с нулем отношения двух выражений, причем отношение будет отрицательным только если выражения будут разных знаков. 5 – число положительное, значит выражение $x - 2$ должно принимать отрицательные значения:

$$x - 2 < 0$$

$$x < 2$$

Ответ: $(-\infty; 2)$

Примечание. Выделить целую часть дроби можно делением многочленов «уголком»:

$$
\begin{array}{r r|l l}
- \; 2x & +1 & x & -\ 2 \\ \cline{3-4}
2x & -4 & 2 & \\ \cline{1-2}
0 & +5(\text{ост}) & &
\end{array}
$$

Значит $\frac{2x+1}{x-2} = 2 + \frac{5}{x-2}$

Второй способ (В принципе, подходит для решения почти любых дробно-рациональных неравенств, хотя существуют более удобные методы).

Идея заключается в следующем: предположим на секунду, что нужно решить не неравенство, а уравнение $\frac{2x+1}{x-2} = 2$. Такое уравнение можно решить умножив левую и правую части на знаменатель, отметив при этом что он не равен нулю, т.е. $x \neq 2$. С неравенством хочется сделать то же самое, **НО** проделать это мешают те самые правила *2-3*, так как заранее неизвестно будет ли $x - 2$ положительным или отрицательным и нужно ли менять знак неравенства или нет. Но, как часто бывает, если что-то нельзя, но очень хочется, то можно. Можно разбить все множество возможных значений переменной x на два подмножества: 1)для которых выражение $x - 2$ принимает положительные значения; 2) для которых $x - 2$ принимает отрицательные значения. Другими словами, рассмотреть два случая:

1. Если $x - 2 > 0$, т.е. $x > 2$

Для всех таких значений x умножим левую и правую части неравенства на **положительное** $x - 2$:

$$\frac{2x+1}{x-2} \cdot (x-2) < 2 \cdot (x-2)$$

$$2x + 1 < 2x - 4$$

$1 < -4$ – неверно,

что означает, что для любых $x > 2$ неравенство не выполняется

2. Если $x - 2 < 0$, т.е. $x < 2$

Для всех таких значений x умножим левую и правую части неравенства на **отрицательное** $x - 2$, изменив знак неравенства на противоположный:

$$\frac{2x+1}{x-2} \cdot (x-2) > 2 \cdot (x-2)$$

$$2x + 1 > 2x - 4$$

$1 > -4$ – верно,

что означает, что для любых $x < 2$ неравенство выполняется

Ответ: $(-\infty; 2)$

2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ И СОВОКУПНОСТЕЙ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Определение. Решением **системы** неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно **каждое** неравенство, входящее в систему.

Для записи системы используют фигурную скобку. Решением системы неравенств является **пересечение** множеств решений неравенств, входящих в эту систему.

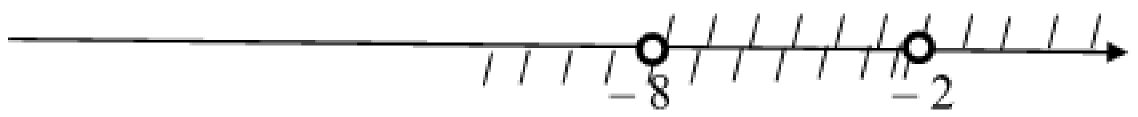
Пример 4. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2x > -16 \\ 4 - 3x > 10 \end{cases}$

Решение. Преобразуем каждое неравенство системы:

$$\begin{cases} x > -8 \\ -3x > 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -8 \\ x < -2 \end{cases}$$

Изобразим решение каждого неравенства на числовом луче, отметив решение первого неравенства сверху, а второго – снизу:



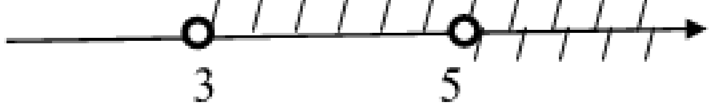
На схеме видно, что их пересечением является промежуток $(-8; -2)$.

Определение. Решением **совокупности** неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно **хотя бы одно** неравенство, входящее в систему.

Для записи совокупности используют квадратную скобку. Решением совокупности неравенств является **объединение** множеств решений неравенств, входящих в эту совокупность.

Пример 5. Решите совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x > 5 \end{array}\right.$

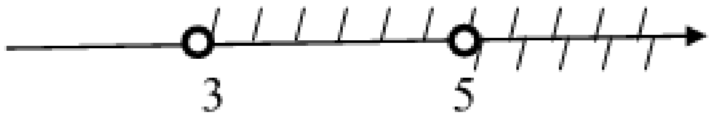
Решение. Изобразим решение каждого неравенства на числовом луче, отметив решение первого неравенства сверху, а второго – снизу:



На схеме видно, что объединением множеств решений является промежуток $(3; +\infty)$.

Пример 6. Решите систему неравенств $\begin{cases} x > 3 \\ x > 5 \end{cases}$

Решение. Изобразим решения неравенств на числовом луче и найдем их пересечение



Ответ: $(5; +\infty)$

Пример 6. Решите неравенство $(x-2)(x-5)>0$

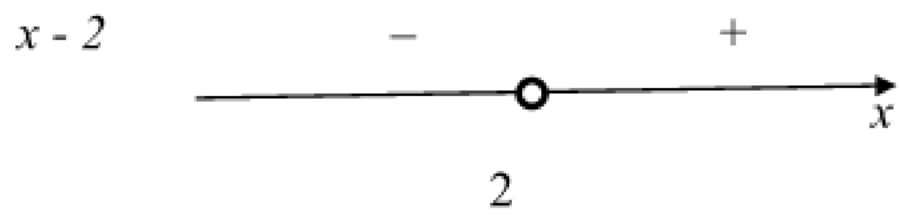
Решение. Обратим внимание, что неравенство представляет собой произведение двух выражений, которое должно быть больше нуля. Такое произведение будет положительным либо если оба множителя одновременно положительны, либо если оба – отрицательны. Первое условие можно задать системой $\begin{cases} x-2>0 \\ x-5>0 \end{cases}$, а второе – системой $\begin{cases} x-2<0 \\ x-5<0 \end{cases}$. Союз «либо» означает, что нужно объединить решение каждой из этих систем, т.е. решить совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2>0 \\ x-5>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2<0 \\ x-5<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

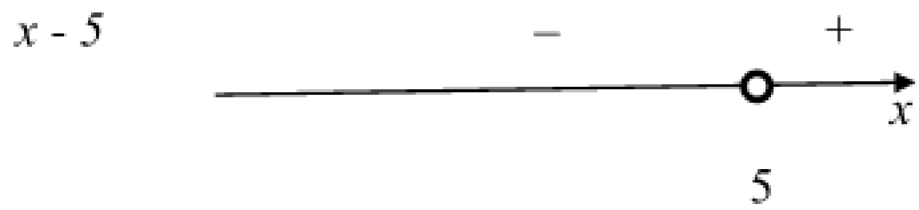
Решением первой системы является промежуток $(5; +\infty)$. Решением второй системы является промежуток $(-\infty; 2)$. Решением же исходного неравенства будет совокупность решений этих систем, т.е. объединение промежутков: $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$.

3. МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ

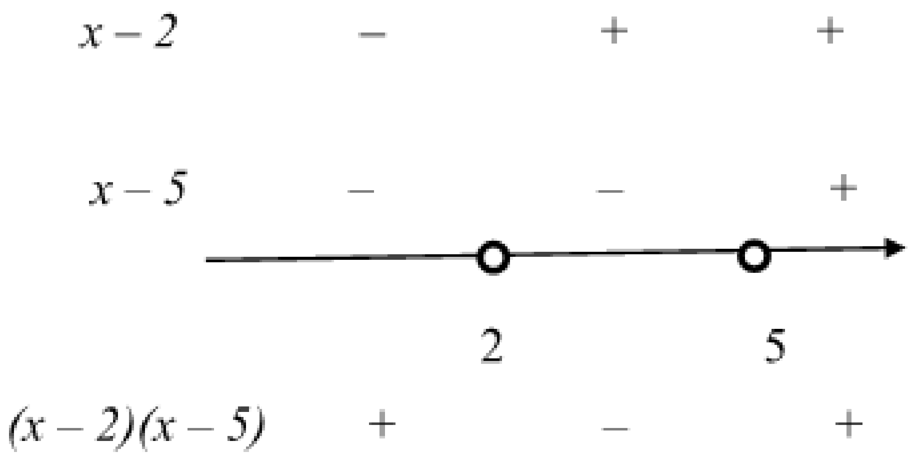
Решим неравенство из предыдущего параграфа $(x-2)(x-5)>0$, используя другие рассуждения. Рассмотрим двучлен $(x-2)$ – он принимает положительные значения при любом значении x большем 2 (другими словами, справа от корня) и отрицательные значения при $x<2$.



Аналогично с двучленом $(x-5)$:



Теперь, зная знаки каждого двучлена, можно найти знаки всего произведения



Теперь выберем промежутки, на которых произведение двучленов принимает положительные значения: $x\ \in(-\infty;2)\cup(5;+\infty)$.

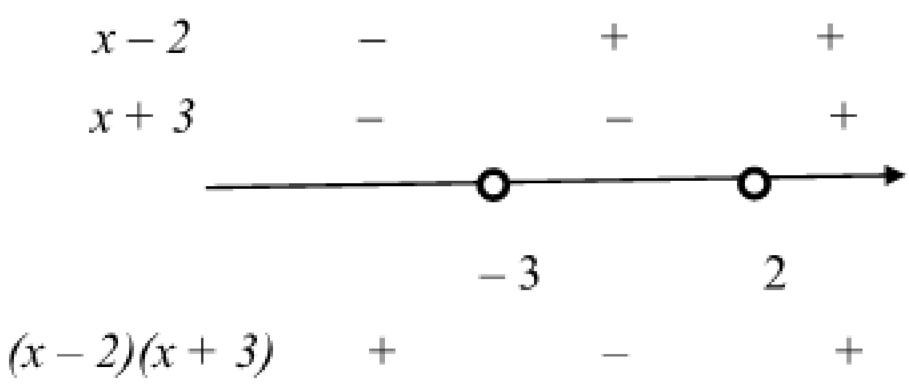
Итак, идея заключается в том, что нужно найти промежутки, на которых многочлен сохраняет свой знак. Такие промежутки называются промежутками (или интервалами) знакопостоянства, а сам метод – **методом интервалов.**

Пример. Решите неравенство $x^2+x-6<0$

Решение. Первый способ. Разложим левую часть на множители

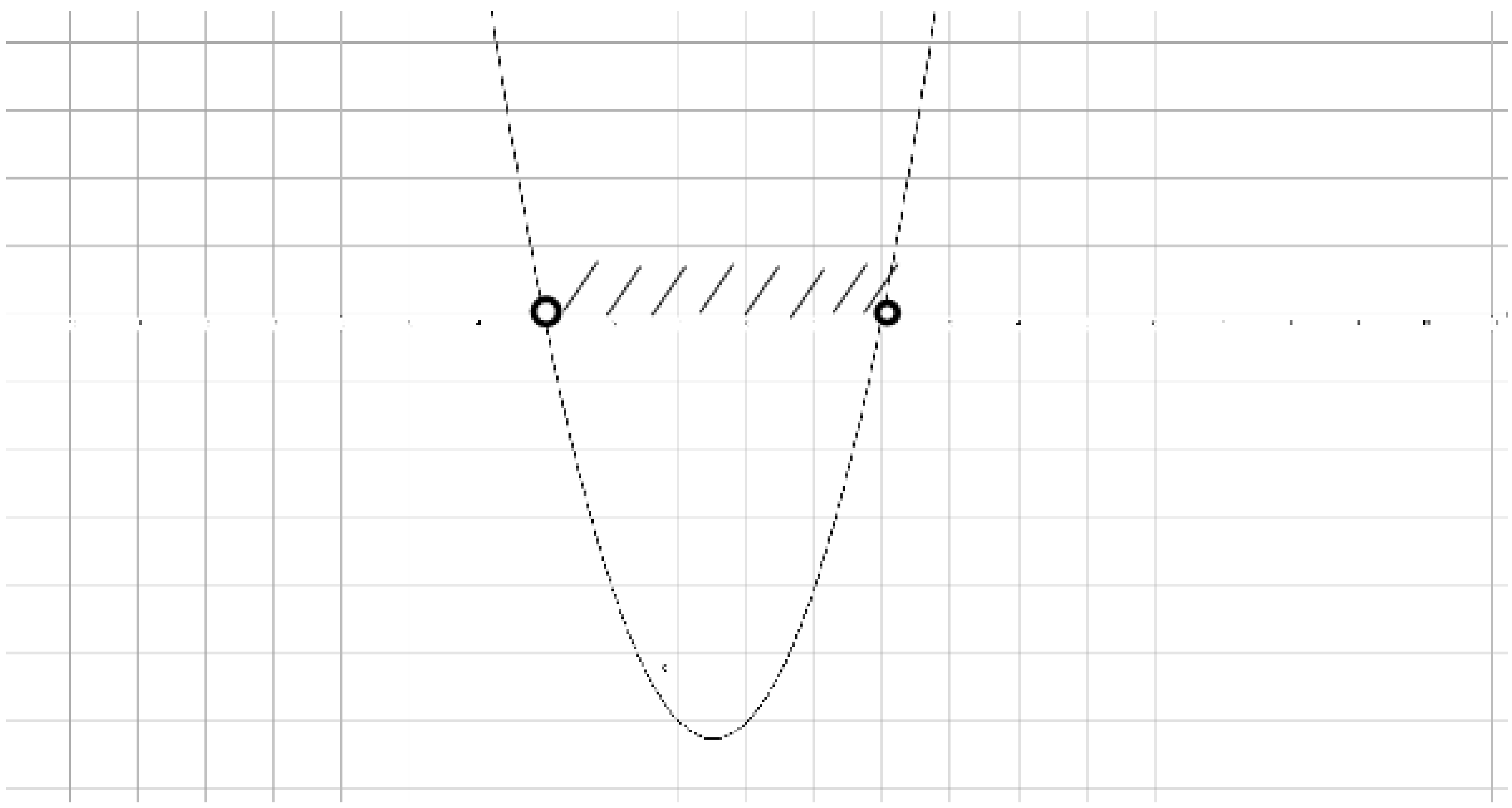
$$(x-2)(x+3)<0$$

Воспользуемся методом интервалов



Ответ: (–3;2).

Решение. Второй способ (Наиболее удобен при решении квадратных неравенств.). Изобразим схематически график квадратичной функции $y = x^2 + x - 6$ и найдем те значения *x,* при которых функция *y* принимает отрицательные значения.



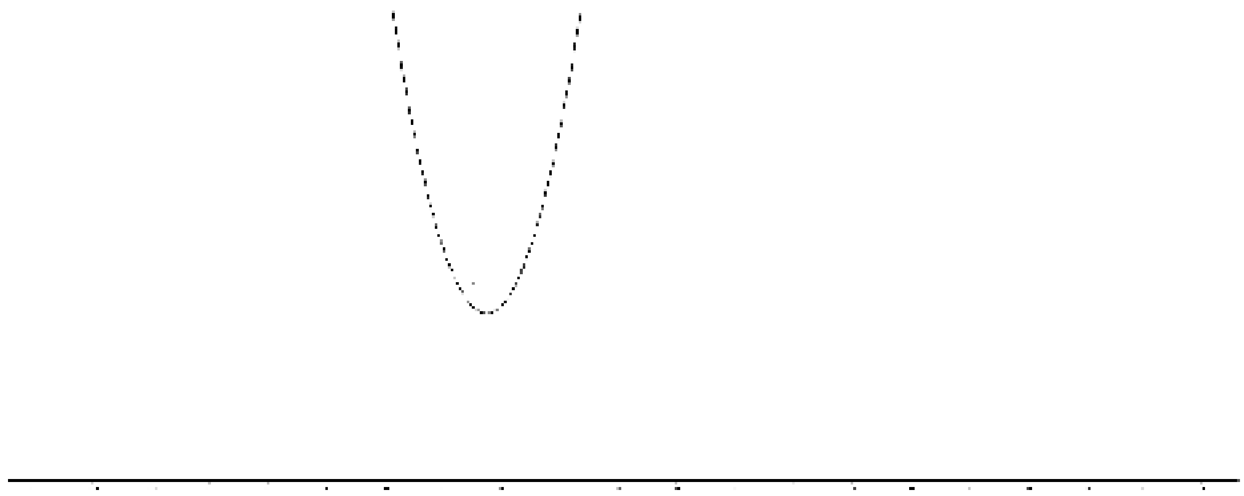
По графику видно, что такие значения функция (у) принимает при $x \in (-3; 2)$.

Данный графический метод по своей сути – тот же метод интервалов немного в другой обертке. И при решении квадратного неравенства данным методом, на самом деле, нужно узнать только:

2. Направление ветвей параболы (определяется по коэффициенту при x^2)
3. Корни квадратного трехчлена (находятся любым удобным способом)

Пример. Решите неравенство $x^2 + x + 6 > 0$

Решение. При попытке решить неравенство методом интервалов обнаруживаем, что дискриминант квадратного трехчлена меньше нуля, что совсем **НЕ ОЗНАЧАЕТ,** что неравенство не имеет решения ($D < 0$ означает, трехчлен не имеет корней и график функции не пересекает ось *x*). Изобразим схематически график функции $y = x^2 + x + 6$



По графику видно, что функция принимает положительные значения любом x

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

Пример. Решите неравенство $(2x-4)(2x+3)^2(3-x) \geq 0$

Решение. Найдем корни каждого двучлена, отметим их на оси x и определим знак каждого двучлена на каждом промежутке (**Внимание:** двучлен $(3-x)$ принимает **положительные** значения **слева** от корня и отрицательные – справа)

$2x-4$ – – + +

$(2x+3)^2$ + + + + (т. к. квадрат не отрицателен при любом x)

$3-x$ + + + –

– 1,5 2 3

$(2x-4)(2x+3)^2(3-x)$ – – + –

А теперь внимание: ответ $x \in [2; 3]$ – **неправильный**, вернее – неполный. Поскольку исходное неравенство было нестрогое, в ответ нужно включить те значения x, при которых выражение равно нулю, т. е. точку – 1,5.

$x \in \{-1{,}5\} \cup [2; 3]$.

Пример. Решите неравенство $x^4 - 16 \geq 0$

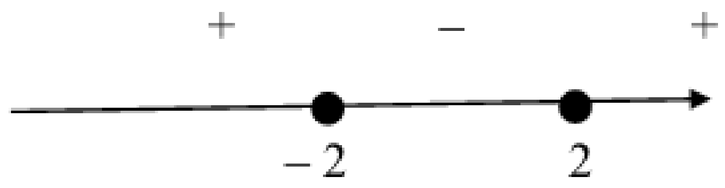
Решение. Разложим многочлен на множители:

$$(x^2-4)(x^2+4) \geq 0$$

$$(x-2)(x+2)(x^2+4) \geq 0$$

Можно заметить, что (x^2+4) всегда больше нуля и разделить левую и правую части неравенство на это положительное выражение. Если этого не заметить, то при попытке найти его корень, обнаруживаем, что корня нет. А так как нет корня и старший коэффициент > 0, то выражение положительно и его можно не учитывать:

$$(x-2)(x+2) \geq 0$$

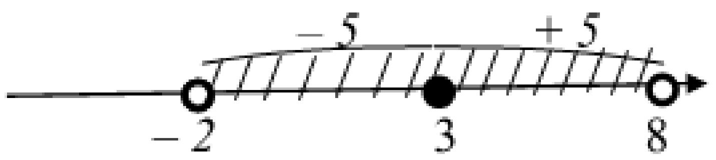


Ответ: $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

4. РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ ПЕРЕМЕННУЮ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

Пример. Решим неравенство $|x-3|<5$

Решение. Воспользуемся геометрическими соображениями. Как известно, модуль разности координат двух точек равен расстоянию между этими точками. Поэтому запись $|x-3|$ можно сформулировать так: расстояние между точкой с координатой x и точкой с координатой 3. А решение неравенства $|x-3|<5$ – все координаты точек, расстояния от которых до 3 меньше 5. Или простыми словами: в какое место координатной прямой можно поставить точку с координатой x, чтобы расстояние от нее до 3 было меньше 5.

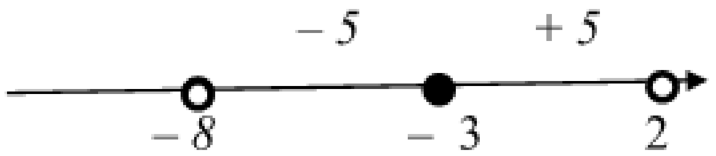


Ответ: $(-2;8)$. Кстати, такой промежуток можно задать системой неравенств:

$$\begin{cases} x>-2 \\ x<8 \end{cases}$$

Пример. Решим неравенство $|x+3|>5$

Решение. Теперь надо найти точки координатной прямой, удаленные от точки, внимание, **–3** (так как $x+3=x-(-3)$) на расстояние, большее чем на 5 единиц



Такие точки находятся на объединении промежутков: $(-\infty;-8)\cup(2;+\infty)$, которые можно задать, кстати, совокупностью неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} x<-8 \\ x>2 \end{array}\right.$$

Итак, на самом деле, для того, чтобы решить любое неравенство вида $|f(x)|<a$, где a – некоторое число, нужно решить систему неравенств:

$$\begin{cases} f(x)>a \\ f(x)<-a \end{cases}$$

Действительно, модуль больше какого-либо числа, если выражение под знаком модуля больше этого числа и меньше противоположному ему, т.е. принадлежащее интервалу $(-a;a)$.

А для того чтобы решить любое неравенство вида $|f(x)|>a$, надо решить совокупность неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > a \\ f(x) < -a \end{array}\right.$$

как решением являются числа, находящиеся вне интервала $(-a; a)$.

Пример. Решить неравенство $|x^2 - 5x| > 6$

Решение. Воспользуемся схемой решения неравенств с модулем и решим совокупность неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 5x > 6 \\ x^2 - 5x < -6 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{c} x \in (2; 3) \\ x \in (-\infty; -1) \cup (6; +\infty) \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (2; 3) \cup (6; +\infty)$.

Пример. Решите неравенство $|x^3 - 2x^2 + x - 5| < -3$

Решение. Можно, конечно, составить систему неравенств и честно, ответственно и упорно ее решать: разложить каждое на множители, найти корни получившихся выражений, воспользоваться методом интервалов и получить в ответе пустое множество решений… Результат разочаровывает и явно не стоит потраченных усилий. Все решение можно свести к одной строчке: расстояние (модуль – это, все-таки, расстояние) не может быть отрицательным, а значит неравенство не имеет решения.

Пример. Решите неравенство $|1000x^3 - 664x^2 + 787x - 10| > -9$

Решение. Рассуждая аналогично, делаем вывод, что любое значение *x* является решением неравенства (модуль любого числа будет больше -9).

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

Пример (для общего развития). Решите неравенство $|x + 5| > 6$

Решение. Решить неравенство можно используя определение модуля, напомним

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{если } f(x) \geq 0 \\ -f(x), \text{если } f(x) < 0 \end{cases}$$

То есть, можно рассмотреть два случая: если $x + 5 \geq 0$, то неравенство принимает вид: $x + 5 > 6$; если $x + 5 < 0$, то неравенство принимает вид: $-x - 5 > 6$. Другими словами неравенство сводится к решению совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x + 5 \geq 0 \\ x + 5 > 6 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + 5 < 0 \\ -x - 5 > 6 \end{cases}$$

И при внимательном рассмотрении каждой системы становится видно, что второе неравенство сильнее первого и, как бы, поглощает его, поэтому остается та самая совокупность вторых неравенств

$$\left[\begin{array}{l} x+5>6 \\ -x-5>6 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x+5>6 \\ x+5<-6 \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;-11) \cup (1;+\infty)$

5. ЗАДАЧИ

5.1. ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

1.1 Является ли решением неравенства

$$5x^3 + 1 < 3x^3 + x$$

число:

а) – 3 б) – 2 в) – 1 г) 0 д) 2?

1.2 Решите неравенство и изобразите на координатной прямой множество его решений:

а) $6 + 2x > 1$

б) $2 - 7x < 0$

в) $0{,}6x + 2 > 6 - x$

г) $0{,}2x - 11 < 4 + 0{,}5x$

д) $(\sqrt{3} - 2)x < 2 - \sqrt{3}$

1.3 При каких значения x двучлен $0{,}7x - 7$ принимает:

а) положительные значения

б) отрицательные значения

в) значения, большие 7

г) значения, меньшие – 1?

1.4 При каких значениях p:

а) $|p| = p$

б) $|p - 1| = 1 - p$

в)$|3{,}5 - 4p| = 4p - 3{,}5$

1.5 Решите неравенство:

а) $3x(2x - 1) - 6x^2 > 2 - x$

б) $4(2a - 1) - 3(a + 6) > a$

в) $3(2y - 5) + 2(3y - 5) < 6y$

г) $0{,}6(2x + 1) - 0{,}4(3x + 2) > 1$

1.6 Решите неравенство:

а) $3x(2x - 1) - 6x^2 > 2 - x$

б) $12y^2 - (3y + 4)4y > y - 10$

в) $(1 + 3x)(3x - 1) > 6x + 9x^2$

г) $(4x - 3)(3 + 4x) + x < 16x^2$

д) $(x - 2)^3 + x^2(6 - x) < (3x - 1)^2 - 9x(x + 2)$

е) $6(y + 1)(y^2 - y + 1) - 2y(3y^2 - 1) \geq 5(0{,}2y - 1)$

1.7 Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

а) $5{,}6(3+y)-1{,}6(2+y)<0$

б) $8{,}4(3-y)+1{,}2(2y-1)>39$

1.8 Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

а) $0{,}3(6-x)-0{,}5(1-2x)>11$

б) $0{,}8(1-4x)+0{,}5(2+6x)<26$

1.9 При каких значениях a множеством решений неравенства:

а) $0{,}3x-6<a$ является числовой промежуток $(-\infty;4)$

б) $8x>1{,}8a+x$ является числовой промежуток $(6;+\infty)$

1.10 Решите относительно x неравенство:

а) $(m+1)x-4<(1-3m)x+2$, если $m>0$

б) $(2+m)x+6>(2-3m)x-1$, если $m<0$

1.11 Известно, что A – множество решений неравенства $2x-1<5{,}8$, B – множество решений неравенства $x-1<m$, где m – некоторое число. Укажите наименьшее натуральное значение m, при котором выполняется соотношение:

а) $A\subset B$

б) $B\subset A$

1.12 Решите неравенство:

а) $\frac{5x}{3}<2$

б) $\frac{6+0{,}5x}{7}<11$

в) $\frac{26-0{,}7x}{5}\geq 1$

1.13 При каких значения x:

а) значение дроби $\frac{1{,}6-12x}{8}$ положительно

1.14 Решите неравенство:

а) $\frac{1}{6}(0{,}2x-4)>2$

б) $\frac{y}{12}-\frac{y}{8}\geq\frac{1}{3}$

в) $\frac{0{,}3y}{4}-\frac{0{,}1y-1}{12}<-0{,}3$

г) $\frac{0{,}1y}{6}-\frac{0{,}3y+2}{12}\geq-\frac{1}{4}$

1.15 При каких значениях a:

а) сумма дробей $\frac{0{,}3-0{,}2a}{6}$ и $\frac{0{,}1a-1{,}5}{12}$ меньше 5

1.16 Сколько элементов содержит множество M, если:

а) $M=\left\{x \mid x\in\mathbb{N}, x-1<\frac{2x-1}{3}+\frac{x}{2}\right\}$

б) $M=\left\{x \mid x\in\mathbb{Z}, \frac{2x-1}{3}+1<x-\frac{x}{3}\right\}$

1.17 При каких значениях переменной x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{0{,}6x - 1}$

б) $\sqrt{2 - 0{,}8x}$

в) $\sqrt{2x + (x-1)^2}$

г) $\sqrt{2x - (x+1)^2}$

1.18 Найдите область допустимых значений переменной в выражении:

а) $\frac{\sqrt{2x-3{,}2}}{2x-5}$

б) $\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{3-2x}}$

в) $\frac{5-2x}{2-\sqrt{2x-1}}$

1.19 Решите неравенство:

а) $\frac{3}{2x-1} > 0$

б) $\frac{-4}{3x-7} >$

в) $\frac{2-\sqrt{5}}{4-3x} \leq 0$

г) $\frac{2\sqrt{2}-3}{4+5x} < 0$

1.20 Решите неравенство:

а) $\frac{3-4x}{2x-1} < -2$

б) $\frac{3-x}{4-x} > 1$

в) $\frac{3+8x}{2x-5} > 4$

1.21 Найдите все значения p, при которых квадратное уравнение $3x^2 - 2x + p = 0$:

а) не имеет корней

б) имеет два различных корня

в) имеет решение

1.22 Решите относительно x уравнение и найдите, при каких значениях m корень уравнения является отрицательным числом:

а) $0{,}2(x - 3m) + 1{,}3(x + 2m) = 14$

б) $0{,}6(3m - 2x) - 0{,}5(8m + x) = m + 16$

1.23 В один резервуар налито 70 л воды, а в другой – 150 л. В первый резервуар в минуту вливается по 6 л, а из второго в минуту выливается по 10 л. В какие моменты времени в первом резервуаре будет меньше воды, чем во втором?

1.24 Из пункта A в пункт B отправился велосипедист со скоростью 15 км/ч. Спустя 30 мин навстречу ему из пункта B выехал другой велосипедист. С какой скоростью должен ехать второй велосипедист, чтобы встретиться с первым через 2 ч 30 мин после своего выезда в точке, расположенной ближе к пункту А?

1.25 Зная, что сумма углов выпуклого nугольника равна$180°(n-2)$, найдите наименьшее число сторон, начиная с которого эта сумма больше $1000°$

1.26 При каких значениях a имеет действительные корни уравнение:

а) $ax^2-9x-2=0$

б) $(1-3a)x^2-4x-3=0$

в) $(a-1)x^2-(2a+3)x+a+5$

1.27 При каком значении c уравнение $4x^2-4(3c-1)x+1-6c=0$ имеет:

а) два положительных корня

б) два отрицательных корня

в) положительный и отрицательный корень

5.2. ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «РЕШЕНИЕ СИСТЕМ И СОВОКУПНОСТЕЙ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

2.1. Найдите пересечение и объединение числовых промежутков:

а) $(-\infty;6)$ и $(-6;+\infty)$

б) $[2;+\infty)$ и $[0;+\infty)$

2.2. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}6-11x>x\\ 0{,}7x<x\end{cases}$

б) $\begin{cases}3-4x\le 0\\ \frac{1}{9}x\le 0\end{cases}$

в) $\begin{cases}2-3x\ge 4x\\ 3x<0{,}2x\end{cases}$

г) $\begin{cases}6x-1<0\\ \frac{1}{7}x\ge -1\end{cases}$

2.3. Найдите область определения функции:

а) $f(x)=\sqrt{3x-4{,}2}+\sqrt{3{,}2-2x}$

б) $f(x)=\sqrt{0{,}4x-1}+\sqrt{0{,}6x+4}$

в) $g(x)=\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{5-x}}{x-4}$

г) $h(x)=\frac{\sqrt{1{,}7x+1}-\sqrt{0{,}4x+3}}{\sqrt{x}}$

2.4. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}9(x+3)<5(x+1)+6(x+2)\\ 2(x-18)<7x-3(2x+3)\end{cases}$

б) $\begin{cases} 3(x+1) > 2(3-x)+4x \\ 6(x-1)+2(3-x) > x \end{cases}$

в) $\begin{cases} 12(2-x)+x(4+x) < x^2 \\ (6x+7)(7-6x) > -(6x-1)^2 \end{cases}$

г) $\begin{cases} (2x-1)^3 - 4x^2(2x-3) < x+2{,}5 \\ 0{,}2(x-18) < 0{,}7x - 0{,}3(2x+3) \end{cases}$

2.5. Замените a каким-либо числом так, чтобы множество целых чисел, удовлетворяющих системе $\begin{cases} 3x > 41{,}7 \\ 2x - a < 0 \end{cases}$

а) состояло из пяти чисел

б) было пустым множеством

2.6. При каких значениях a не имеет решений система неравенств:

а) $\begin{cases} 0{,}3x - 4{,}5 < 0 \\ x - a > 0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0{,}5(x-2) \geq 0{,}4 \\ 2x - a \leq 0 \end{cases}$

2.7. При каких значениях b имеет решения система неравенств:

а) $\begin{cases} 0{,}5(x-2) \geq 0{,}4 \\ 2x - b \leq 0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 12 + 3x \leq 6 + 2{,}5x \\ 4x + 2{,}3 \geq b - 1{,}7 \end{cases}$

2.8. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \frac{6-5x}{2} > 1 \\ \frac{0{,}2x+2}{3} - \frac{0{,}3x-1}{2} < 1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{1{,}3-x}{2} - \frac{0{,}5x}{4} \leq x \\ 1 - \frac{x}{3} \leq \frac{x}{4} \end{cases}$

2.9. Найдите наибольшее целое число (если оно существует), удовлетворяющее системе неравенств:

а) $\begin{cases} 8(3-x) - 2x > 0 \\ \frac{x}{4} - \frac{x}{2} < 1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} -x < 2 \\ \frac{x-3}{4} - x > 0 \end{cases}$

2.10. При каких значениях a решение системы уравнений $\begin{cases} 3x + y = a - 4 \\ x - y = a - 1 \end{cases}$ удовлетворяет условию: $x < 0, y > 0$

2.11. При каких значениях b решение системы уравнений $\begin{cases} x - 2y = 2b + 1 \\ 6y - x = 8b + 3 \end{cases}$ удовлетворяет условию: $x > 0, y < 0$

2.12. Решите двойное неравенство двумя способами:

а) $1{,}5 < \frac{2+x}{2} < 2{,}5$

б) $-1 < \frac{2-x}{3} < 0{,}5$

в) $1 < \frac{4-2x}{3} < 2$

2.13. При каких b значение двучлена $2x + 2$ принадлежит промежутку $[-6; 6]$

2.14. Найдите все целые числа удовлетворяющие системе:

а) $\begin{cases} -1 < \frac{1}{3}x - 2 < 1 \\ 8(0{,}5x - 1) > 6x - 22 \end{cases}$

б) $\begin{cases} -3 < \frac{x-8}{5} < 1 \\ 4(x - 3{,}6) > 3(x - 2) \end{cases}$

2.15. При каких значениях a не имеет решений система неравенств:

а) $\begin{cases} 3x - 1 < 0 \\ 0{,}2x + 1 > 0 \\ 3x + 4 < 3a \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2(x - 1) - 3x < 0 \\ 6(2 - x) - x > 3x \\ 4x - 5 < 3(a - 1) \end{cases}$

2.16. Решите совокупность неравенств

а) $\left[\begin{array}{l} 2 < x < 5 \\ x \le 2 \end{array}\right.$

б) $\left[\begin{array}{l} 3 < x < 5 \\ x \ge 5 \end{array}\right.$

в) $\left[\begin{array}{l} -1 \le x < 0 \\ 0 \le x < 2 \\ 2 \le x < 5 \end{array}\right.$

г) $\left[\begin{array}{l} -1 < x < 2 \\ 2 \le x < 5 \\ x \ge 5 \end{array}\right.$

2.17. Решите систему:

а) $\begin{cases} 0 < x \le 3 \\ \left[\begin{array}{l} x \le 1 \\ x > 2 \end{array}\right. \end{cases}$

б) $\begin{cases} -3 \le 2x - 1 \le 7 \\ \left[\begin{array}{l} x \le -1 \\ x \ge 3 \end{array}\right. \end{cases}$

в) $\begin{cases} -3x > -12 + x \\ \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x \ge 1 \end{array}\right. \\ 2x + 1 > -x - 10 \end{cases}$

г) $\begin{cases} -2 < 3x - 5 < 19 \\ \left[\begin{array}{l} 3x - 1 < 5 \\ 2x - 5 > 7 \end{array}\right. \end{cases}$

2.18. Найдите все значения x, удовлетворяющие условию:

а) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > 1 \\ 2x - 3 < 5 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 3x < 1 \end{cases}\end{array}\right.$

б) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x < 15 \\ 3 - 6x < 15 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 5 \\ 3 < x - 1 < 5 \end{cases}\end{array}\right.$

2.19. Решите неравенство:

а) $(2 - x)(x - 8) \leq 0$

б) $(1 - x)(7 - x) \geq 0$

в) $\frac{3-5x}{7-x} \geq 0$

г) $\frac{7-2x}{x+1} \leq 0$

д) $x^2 - 8x + 7 \geq 0$

е) $3 + 2x - x^2 \leq 0$

ж) $(x^2 + 5)(2x - 17) < 0$

з) $(-x^2 - 3)(3x + 7) \geq 0$

3.1Решите методом интервалов неравенство:

а) $(x - 7)(x + 8) > 0$

б) $(x - 3)(x + 2) < 0$

в) $x(x - 5) \leq 0$

г) $x(x + 2) > 0$

3.2 Решите методом интервалов неравенство:

а) $4x^2 - 4x + 1 > 0$

б) $x^2 - 2x + 1 < 0$

в) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$

3.3 Решите неравенство:

а) $x^2 + 3x + 2 < 0$

б) $x^2 - 7x + 12 > 0$

в) $2x^2 + 5x + 2 \leq 0$

г) $-2x^2 - 5x + 1 \geq 0$

3.4 Решите неравенство:

а) $(x - 1)^3(x + 2)^2(x - 3) > 0$

б) $(x - 3)^4(x + 5)^5(x - 7) < 0$

в) $(x + 10)(x + 9)^2(x + 8)^4 \geq 0$

г) $(x - 1)^4(x + 2)^2(x + 5) \leq 0$

3.5 Решите неравенство:

а) $(x - 1)(x^2 - 1) > 0$

б) $(x^2 - 4)^3(x - 2) < 0$

в) $4x^3 - 20x^2 > x - 5$

г) $x^3 - 4x^2 - 8x + 8 \leq 0$

д) $x^6 - 9x^3 + 8 > 0$

3.6 Решите дробно-рациональное неравенство:

а) $\frac{(x+1)(x-2)}{x-2} > 0$

б) $\frac{(x+1)^2(x-2)^5}{x-3} \leq 0$

в) $\frac{(x-1)(x-2)^3(x-3)^2}{(x-4)^5(x-5)^4} \geq 0$

г) $\frac{x(x+3)(x-2)^2}{(x^2+x+1)(x+1)} > 0$

д) $\frac{(x+5)(3x^2-3x+1)}{x^2-6x+9} > \frac{(x+5)(x^2+2x-1)}{x^2-6x+9}$

е) $\frac{x^2(2x-9)(x-1)^3}{(x+4)^5(2x-6)^4} \leq 0$

ж) $\frac{3x^2-10x+3}{x^2-10x+25} > 0$

4.1Используя геометрический смысл модуля, решите неравенство:

а) $|x - 7| < 4$

б) $|x + 5| > 6$

в) $|1 - x| \leq 23$

г) $|x + 17| < -2$

д) $|17 - x| > -1$

4.2 Найдите множество значений a, при которых для любых значений x верно неравенство:

а) $|2 - x| > 2a - 1$

б) $|7{,}2 + x| > 1{,}5 - 3a$

4.3 Найдите множество значений a, при которых для любых значений x не имеет решения неравенство:

а) $|x + 1| < a + 3$

б) $|23 - x| < 1{,}5 - 5a$

4.4 Решите неравенство

а) $|3x - 2| \geq 3{,}4$

б) $|12x - 1| > 17$

в) $|22 - 3x| < 8$

г) $|16 - 7x| \leq 2$

4.5 Решите двойное неравенство:

а) $1 < |3x - 8| < 5$

б) $1 \leq |2x - 11| \leq 5$

4.6 При каких значениях a всякое решение двойного неравенства $3 < |x - 2| < 4$ является решением неравенства $x + 2a < 0$

4.7 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} |x-3| \leq 2 \\ |3-2x| \leq 1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} |x+4| > 2 \\ |3{,}5-2x| < 0{,}5 \end{cases}$

в) $\begin{cases} |3x-1| \leq 7 \\ |7-x| \leq 2 \end{cases}$

4.8 Решите неравенство:

а) $|x^2+1| > 2$

б) $|x^2-2x| < 3$

в) $|x^2+x-1| > 1$

г) $\left|\frac{3x+1}{x-3}\right| < 3$

4.9 Найдите все целые решения неравенства:

а) $|x^2-3| < 6$

б) $|x^2-8| < 7$

в) $|x^2+4x| < 5$

г) $|2x^2-9x+15| \geq 20$

4.10 Решите неравенство двумя способами:

а) $x^2+|x|-6 < 0$

б) $x^2-2|x|-8 > 0$

5.2. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

5.1 Решите неравенство:

а) $(x-2)^2(x-3) < 0$

б) $|x-5|(x-7) < 0$

в) $|x^2-16|(3-x) \geq 0$

г) $\frac{|x^2-9|}{2x-5} \geq 0$

д) $(x-3)\sqrt{x-5} \geq 0$

е) $\frac{3x-1}{\sqrt{1-x}} \leq 0$

ж) $\sqrt{2x-1} < 3$

з) $\sqrt{9-x^2} \geq 1$

и) $\sqrt{|x|-2} \leq 3$

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебра. 8 класс: учеб. для учащихся общеобразовательных учреждений / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, И. Е. Феоктистов. – М.: Мнемозина, 2013. – 384 с.

2. Сборник задач по алгебре: учеб. пособие для 8-9 кл. с углубл. изучением математики / М. Л. Галицкий, А. М. Гольдман, Л. И. Звавич. – М.: Просвещение, 2001. – 271 с.

3. Алгебра. 8 класс. Часть 1. Учебник для средней школы / Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович, О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин. – М.: Ювента, 2014. – 128 с.

4. Алгебра. 8 класс. Часть 3. Учебник для средней школы / Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович, О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б.В. Трушин. – М.: Ювента, 2014. – 144 с.

5. Сборник задач по математике для поступающих в высш. технич. учеб. заведения / В. К. Егерев, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемский и др.; под ред. М. И. Сканави. – М.: АСТ; Мир и образование, 2014. – 608 с.

Учебное издание

УЧИМСЯ РЕШАТЬ НЕРАВЕНСТВА

Сборник заданий

В авторской редакции

Составитель

Аникеев Никита Аркадьевич

Подписано в печать 01.09.2018. Формат 29,7×42/4.
Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная.
Уч.-изд. л. 2,1. Усл. печ. л. 2,5.
Гарнитура шрифта Times New Roman.
Тираж 10 экз.

МБУ ДО ЦТРиГО г. Сочи
354065, Краснодарский край, г. Сочи, ул. Красноармейская, 30
Тел./факс (862)254–27–52