СИРИУС ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР	**Образовательный Фонд «Талант и успех»** **(Фонд «Талант и успех»)**

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ НЕСКОЛЬКИМИ СПОСОБАМИ

Выпускная аттестационная работа слушателя программы переподготовки педагогических и управленческих кадров для реализации программ выявления и поддержки одаренных детей и молодежи «Большие вызовы»

Аникеева Никиты Аркадьевича

(Ф.И.О. в родительном падеже)

Научный руководитель

канд. физ.-мат. наук Штерн Александр Савельевич

(ученая степень, Ф.И.О.
в именительном падеже)

Сочи
2018

ЗАЯВЛЕНИЕ О САМОСТОЯТЕЛЬНОМ ХАРАКТЕРЕ ВЫПУСКНОЙ АТТЕСТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Я, Аникеев Никита Аркадьевич, слушатель программы переподготовки педагогических и управленческих кадров для реализации программ выявления и поддержки одаренных детей и молодежи «Большие вызовы», заявляю, что в своей выпускной аттестационной работе на тему «Решение одной задачи несколькими способами», представленной для публичной защиты, не содержится элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных аттестационных и квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен с действующим регламентом учебного процесса, согласно которому обнаружение плагиата (прямых заимствований из других источников без соответствующих ссылок) в соответствующей части выпускного аттестационного проекта является основанием для выставления члену проектной команды, ответственному за ее разработку, за выпускную аттестационную работу оценки «неудовлетворительно».

___________________ (Подпись слушателя)

_________________________ (Дата)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Аннотация

Данная работа посвящена созданию сборника сюжетных задач и коллекционированию различных решений.

В работе осуществлен поиск сюжетных задач в различных источниках и найдены различные способы их решения; изучена методическая литература, посвящённая алгебраическому и арифметическому методам решения задач; изучены задания муниципального этапа региональной олимпиады школьников по математике для 5-7 классов; подготовлено и проведено занятие в 5 и 6 классах, посвященное решению текстовых задач, приведена статистика решения задач и использованных в решении методов; составлен сборник задач с коллекцией решений.

Annotation

This work is devoted to the creation of a collection of plot tasks and the collection of various solutions.

The search of the plot problems is carried out in the work from various sources and the variants of their solutions; were found methodical literature devoted to algebraic and arithmetic methods for solving problems and the tasks of the municipal stage of the regional Olympiad of schoolchildren in mathematics for grades 5-7 were studied. The lessons at the 5 and 6 grades according to the theme “the solution of word problems” were prepared and taught. There are statistics of the solving some problems and using special methods for them. There are collection of problems with their solutions/

Введение

Проблемы, связанные с обучением младших школьников решению сюжетных задач, как были, так и остаются на сегодняшний день весьма актуальными. Многие авторы пишут о том, что арифметические задачи таят огромные возможности для того, чтобы научить решающих их школьников самостоятельно думать и анализировать неочевидные жизненные ситуации. Арифметический метод лучше приспособлен к стилю мышления учащихся 5-6 классов. Тем не менее Александр Васильевич Спивак в 1999 году проводил занятия для 6 классов на Малом мехмате МГУ именно по составлению уравнений. Не каждую сюжетную задачу возможно решить арифметическим методом с одной стороны; с другой – многие задачи гораздо «удобнее», полезнее и быстрее решаются именно этим методом, не говоря уже о том, что алгебраический метод, требующий, в основном, хорошей техники ученика, не всегда способствует пониманию задачи, осознания ее глубины.

Анализ заданий олимпиад младших школьников за несколько лет дает возможность понять, что уже в 6 классе от учащихся ожидается хорошее владение техникой составления уравнений и знание методов их решений. Многие предлагаемые задачи просто не целесообразно решать арифметическими методами. Поэтому, желательно, чтобы уже в младших классах школьники в равной степени владели разными методами решения задач: арифметическим и алгебраическим, и делали это наиболее подходящим и удобным, в конкретной ситуации, способом.

Данная работа посвящена созданию сборника сюжетных задач с коллекцией различных решений.

Для более эффективного достижения поставленной цели планируется осуществить поиск сюжетных задач в различных источниках и нахождение различных способов их решения; изучение методической литературы, посвящённой алгебраическому и арифметическому методам решения задач; изучение заданий муниципального этапа региональной олимпиады школьников по математике для 5-7 классов; подготовка и проведение кружкового занятия в 5 и 6 классах, посвященного решению текстовых задач, и его анализ.

Глава1. Коллекция задач и различные способы их решения.

1.1 Разные задачи.

1. Трава на всем лугу растет одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров съели бы ее за 24 дня, 30 коров – за 60 дней. Сколько коров съели бы ее за 96 дней?

Арифметическое решение: Пусть корова съедает 1 порцию травы за день. 70*24=1680 порций травы на лугу + те порции, которые выросли за 24 дня 30*60=1800 порций травы на лугу + те порции, которые выросли за 60 дней.

За 60 – 24 = 36 дней на лугу выросло 30·60 – 70·24 = 120 порций. Значит, помимо съеденных за 60 дней 30 коровами 1800 порций за добавочные 96 – 60 = 36 дней вырастет еще 120 порций. Всего 1920. За 96 дней их съедят 1920 : 96 = 20 коров.

Алгебраическое решение: пусть x – производительность одной коровы (сколько она съедает за 1 день), тогда объем съеденной травы за 24 дня равно $24 \cdot 70 \cdot x = 1620x$, а за 60 дней – $30 \cdot 60 \cdot x = 1800x$. Узнаем сколько травы вырастает за один день: $\frac{1800x-1620x}{36} = \frac{120x}{36} = \frac{10x}{3}$. Тогда, приняв за k количество коров, получаем: $1800x + (96-60) \cdot \frac{10x}{3} = 96x \cdot k$. Откуда $k = 20$.

2. Шарик и Матроскин надоили 10 литров молока, разлили его по двум ведрам и понесли домой. Шарик устал и перелил часть молока из своего ведра в ведро Матроскина. От этого у Шарика молока стало в трое меньше, а у Матроскина – втрое больше. Сколько молока стало у Матроскина?

Арифметическое решение: Пусть Шарик, прежде чем перелить молоко Матроскину, перельёт его в отдельный бидон. По условию, если добавить это молоко Шарику (Матроскину), то у того станет втрое больше молока. Значит, сейчас у Шарика и Матроскина молока поровну, а в бидоне молока вдвое больше, чем у каждого из них. Это значит, что в бидоне сейчас половина всего имеющегося молока, то есть 5 л, а у Шарика и Матроскина – по 2,5 л. Поэтому в конце у Матроскина стало 2,5 + 5 = 7,5 л.

Алгебраическое решение: Пусть s литров молока нес Шарик, а m литров – Матросскин. Так как вдвоем они несли все надоенное молоко, то $s + m = 10$. После переливания у Матроскина стало $3m$ литров молока, а у Шарика – $\frac{s}{3}$ и так как общее количество молока не изменилось, то $3m + \frac{s}{3} = 10$. Решив систему уравнений найдем сколько молока стало у Матроскина.

3. На скотном дворе гуляют гуси и поросята. Петя сосчитал количество голов, их оказалось 30, потом сосчитал сколько всего ног, их оказалось 84. Сколько гусей и сколько поросят было на скотном дворе?

Арифметическое решение: Предположим, что на дворе гуляют только гуси. У них 60 ног. 24 лишние ноги принадлежат поросятам, по две ноги на каждого. Итак, на дворе гуляют 12 поросят.

Алгебраическое решение: обозначим количество гусей и поросят соответственно буквами g и *p*. Тогда можно составить два уравнения: $\begin{cases} g + p = 30 \\ 2g + 4p = 84 \end{cases}$. Решив систему, находим *p=12.*

4. Коля и Катя учатся в одном классе. Мальчиков в этом классе в два раза больше, чем девочек. У Коли одноклассников на 7 больше, чем одноклассниц. Сколько одноклассниц у Кати?

Арифметическое решение: Так как у Коли одноклассников на 7 больше, чем одноклассниц, то мальчиков в этом классе на 8 больше, чем девочек. Кроме того, их в два раза больше, чем девочек. Поэтому мальчиков – 16, а девочек – 8.

Алгебраическое решение: Пусть m – количество мальчиков, а d – количество девочек в классе. Так как мальчиков в два раза больше, то $m = 2d$. Из второго условия следует, что $m - 1 - d = 7$. Решив систему уравнений, найдем количество мальчиков и девочек.

5. Пес и кот одновременно схватили зубами батон колбасы с разных сторон. Если пес откусит свой кусок и убежит, коту достанется на 300 грамм больше, чем псу. Если кот откусит свой кусок и убежит, псу достанется на 500 г больше, чем коту. Сколько колбасы останется, если оба откусят свои куски и убегут?

Арифметическое решение: Если два (одинаковых) пса ухватят колбасу с двух сторон, между ними будет кусок в 300 г. Если два кота ухватят колбасу с двух сторон, между ними будет кусок в 500 г. Значит, два пса и два кота оставят от двух колбас 800 г. А одни пёс и один кот от одной колбасы – вдвое меньше.

Алгебраическое решение: пусть в зубах у пса p г. колбасы, а в зубах у кота – k г., тогда батон колбасы весит $2p + 300$ или $2k + 500$; $2p + 300 = 2k + 500$; $2p - 2k = 500 - 300$; $p - k = 100$; $p = 100 + k$, т.е. пес откусывает на 100 г. больше. Значит пес и кот оставят 400 г.

6. Когда отцу было 27 лет, сыну было 3 года, а сейчас сыну в три раза меньше лет, чем отцу. Сколько лет сейчас каждому из них?

Арифметическое решение: Разница в возрасте между отцом и сыном неизменна и равна 24 годам. Так как сыну сейчас в три раза меньше лет, чем отцу, то 24 года – это удвоенный возраст сына. Сыну – 12 лет, отцу – 36 лет.

Алгебраическое решение: пусть x – возраст сына, тогда $3x = x + 24;\ 2x = 24;\ x = 12$

7. Рыбак плыл по реке на лодке, зацепил шляпой за мост, и она свалилась в воду. Через час рыбак спохватился, повернул обратно и подобрал шляпу на 4 км ниже моста. Какова скорость течения? Собственная скорость лодки оставалась неизменной.

Алгебраическое решение: обозначим х – собственная скорость лодки, у – скорость течения реки, х-у – скорость лодки против течения, у – проплывает шляпа за час, х-у проплывает лодка за час. Т.к. лодка и шляпа удаляются друг от друга, то через час между ними будет у+х+-у= х. Когда лодка повернулась обратно, то она будет приближаться к шляпе со скоростью х+у-у=х, т.е. рыбак догонит шляпу через х:х=1 час после разворота, потратив всего 2 часа, за которые шляпа проплывет 4 км. Т.о. скорость течения реки 2км/ч.

Арифметическое решение: Удобно рассматривать движение шляпы и лодки относительно воды, потому что относительно воды шляпа неподвижна, а скорость лодки, когда она плывет от шляпы и к шляпе, по модулю одна и та же — так, как это было бы в озере. Следовательно, после поворота рыбак плыл к шляпе тоже 1 ч, т. е. он подобрал шляпу через 2 ч после того, как уронил ее. По условию за это время шляпа проплыла по течению 4 км, откуда следует, что скорость течения 2 км/ч.

8. Гарри, Рон и Гермиона хотели купить одинаковые непромокаемые мантии. Однако им не хватало денег: Рону – трети цены мантии, Гермионе – четверти, а Гарри- одной пятой цены мантии. Когда на распродаже цена мантии упала на 9,4 сиклей, друзья объединили свои сбережения и купили три мантии, потратив все деньги. Сколько сиклей стоила одна мантия до снижения цены?

Алгебраическое решение: Пусть сначала мантия стоила х сиклей, тогда у Рона было 2/3х сиклей, у Гермионы – 3/4х сиклей, а у Гарри – 4/5х сиклей. На распродаже мантия стоила (x – 9,4) сикля, а три мантии – 3(x – 9,4) сиклей. Так как друзья купили три мантии, потратив все деньги, то 2/3x + 3/4x + 4/5x = 3(x – 9,4). Решая это уравнение, получим: x = 36.

Арифметическое решение: Сиклей у Рона было $\frac{2}{3}$ от цены мантии, у Гермионы $\frac{3}{4}=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}$ от цены мантии, у Гарри $\frac{2}{3}+\frac{2}{15}$. Тогда всего сиклей у ребят было $\frac{6}{3}+\frac{1}{12}+\frac{2}{15}=2+\frac{13}{60}$ от цены мантии, т.е. на третью мантию им не хватило $\frac{47}{60}$ от ее цены, что составляет $9{,}4\cdot 3=28{,}2$. Значит мантия стоила $28{,}2\cdot\frac{60}{47}=36$

9. Четверо товарищей покупают лодку. Первый вносит половину суммы, вносимой остальными; второй — треть суммы, вносимой остальными; третий — четверть суммы, вносимой остальными; четвёртый — 130 рублей. Сколько стоит лодка?

Арифметическое решение: Половина суммы, вносимой остальными — это треть всей суммы, тогда первый внёс 1/3 стоимости лодки, второй — 1/4 (треть суммы, вносимой остальными — это четверть всей суммы), третий — 1/5. Таким образом, первые три товарища внесли

$$1/3 + 1/4 + 1/5 = 47/60$$

стоимости лодки. Значит, на долю четвёртого пришлось 13/60. Если 13/60 стоимости лодки — 130 рублей, то 1/60 — 10 рублей, а вся стоимость лодки — 600 рублей.

Алгебраическое решение: Пусть первый внес a, второй – b, третий – c рублей, тогда $a=\frac{b+c+130}{2}, b=\frac{a+c+130}{3}; c=\frac{a+b+130}{4}$, подставляя a во второй и третье уравнения и решая систему находим $b=150, c=120$, тогда $a=200$, и стоимость лодки 150+120+200+130=600 рублей.

10. Истратив половину денег, я заметил, что осталось вдвое меньше рублей, чем было первоначально копеек, и столько же копеек, сколько было первоначально рублей. Сколько денег я истратил?

Алгебраическое решение: Пусть у меня было x рублей и y копеек, то есть 100x + y копеек. А осталось y/2 рублей и x копеек, то есть

$$(100 \cdot y/2) + x$$

копеек. Получаем уравнение

$$100x + y = 2(50y + x),$$

откуда

$$98x = 99y.$$

Поскольку числа 99 и 98 взаимно просты, то x делится на 99. Среди чисел от 0 до 99 таких только два — 0 и 99. Следовательно, у меня было 99 рублей 98 копеек.

11. Голова рыбы весит столько, сколько хвост и половина туловища, туловище — столько, сколько голова и хвост вместе. Хвост её весит 1 кг. Сколько весит рыба?

Алгебраическое решение: Пусть голова рыбы весит x килограммов. Тогда половина туловища весит $x - 1$ килограммов, а всё туловище весит $2x - 2$ килограммов. Следовательно,

$$2x - 2 = x + 1,$$

откуда

$$x = 3.$$

Следовательно, голова весит 3 килограмма, туловище — 4 килограмма, хвост — 1 килограмм.

Арифметическое решение: так как голова весит столько, сколько хвост и половина туловища, то добавив к голове хвост, получим вес двух хвостов и половину туловища. Значит половина туловища весит как два хвоста, т.е. 2 кг. Все туловище весит 4 кг, а голова – 3 кг.

12. Один сапфир и два топаза ценней, чем изумруд, в три раза. А семь сапфиров и топаз его ценнее в восемь раз. Определить прошу я Вас, сапфир ценнее иль топаз?

Алгебраическое решение: Обозначим буквами s, t и i, соответственно, цены сапфира, топаза и изумруда. По условию

$$s + 2t = 3i$$

и

$$7s + t = 8i.$$

Домножая первое из этих уравнений на 8, а второе на 3, получаем

$$8s + 16t = 24i$$

и

$$21s + 3t = 24i.$$

Таким образом,

$$8s + 16t = 21s + 3t,$$

откуда $13t = 13s$, то есть $t = s$. Топаз и сапфир одинаково ценны.

Арифметическое решение: 8 сапфиров и 16 топазов стоят столько же, сколько 21 сапфир и 3 топаза – как 24 изумруда. Следовательно, 13 топазов стоят столько же, сколько 13 сапфиров.

13. Офеня (продавец в разнос, коробейник) купил на оптовом рынке партию ручек и предлагает покупателям либо одну ручку за 5 рублей, либо три ручки за 10 рублей. От каждого покупателя офеня получает одинаковую прибыль. Какова оптовая цена ручки?

Алгебраическое решение: Пусть цена ручки x руб., тогда $5 - x = 10 - 3x$; $x=2{,}5$рубля.

Арифметическое решение:

1 ручка оптовая цена прибыль

3 ручки

Если бы Офеня вместо продажи трех ручек продавал одну, а две другие дарил, то он дарил бы 5 рублей, значит оптовая цена 1 ручки 2,5 рубля.

14. Три землекопа подрядились вырыть котлован. Если заболеет Иван, то двое сделают работу за 30 дней, если заболеет Петр – то за 15 дней, а если не придет Андрей – то за 12 дней. Вышел на работу один Андрей. За сколько дней он управится?

Арифметическое решение: Представим себе, что совместная работа продолжалась 60 дней. За это время Петр с Андреем вырыли два котлована, Иван с Андреем Выкопали 4 котлована, а Иван с Петром – 5 котлованов. Но всего они выкопали не 11 котлованов, а только 5,5, поскольку иначе вклад каждого будет подсчитан дважды. Вспомним, что за это время вклад в работу Ивана с Петром составляет 5 котлованов. Следовательно, вклад в работу Андрея: половина котлована за 60 дней. Значит весь котлован он выкопает за 120 дней.

Алгебраическое решение: Пусть производительность Ивана равна i, производительность Петра = p, а Андрея = a,тогда $p + a = \frac{1}{30}$; $i + a = \frac{1}{15}$; $i + p = \frac{1}{12}$, тогда $2i + 2p + 2a = \frac{11}{60}$; $i + p + a = \frac{11}{120}$; $a = \frac{11}{120} - \frac{1}{12} = \frac{1}{120}$.

Значит один Андрей выкопает котлован за 120 дней.

15. Малыш съедает торт за 24 минуты, а Карлсон – за 12 минут. Малыш начал есть первым, а Карлсон присоединился к нему через 6 минут. Через какое время они вдвоем доедят торт? Какая доля торта достанется Малышу?

Арифметическое решение: за 6 минут Малыш успел съесть четверть торта и дальше оставшиеся три четверти торта они ели вдвоем. Из остатка Карлсон съест половину торта, а Малыш четверть, т.к. Карлсон ест в два раза быстрее. Т.о. торт будет съеден через 12 минут, а Малышу достанется половина.

Алгебраическое решение: Пусть *x* – время, когда они ели торт вместе, тогда $\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{12}\right)x = 1 - \frac{1}{24} \cdot 6$; $\frac{3}{24}x = \frac{3}{4}$; $x = 6$; т.о. торт будет съеден через 12 минут.

16. Когда у Маши было две взрослых кошки и щенок Барбос и все они ели поровну, то мешка корма для животных хватало на 6 дней. Барбос вырос, и мешка стало хватать на 4 дня. Потом Маша завела еще собаку Жучку, и мешка корма стало хватать только на 3 дня. Кто ест больше: кошка или собака Жучка, и во сколько раз?

Арифметическое решение: Будем считать, что каждый ел одну порцию, тогда за 6 дней они съедали вместе 18 порций – один мешок. Когда Барбос вырос, кошки по-прежнему съедали 2 порции в день, то есть за 4 дня они съедали 8 порций, а остальные 10 порций съедал Барбос, то есть он съедал 2,5 порции в день. Значит за три дня они втроем стали съедать 2*3+2,5*3=13,5 порций. Следовательно, Жучка съедает за три дня 4,5 порции, то есть 1,5 порций в день. Таким образом, она ест в полтора раза больше, чем одна кошка.

Алгебраическое решение: Пусть производительность поедания корма кошки равна k, маленького Барбоса равна b, большого Барбоса – B, Жучки – g, тогда из уравнения $2k + b = \frac{1}{6}$;получаем $3k = \frac{1}{6}$; $k = \frac{1}{18}$; из $\begin{cases} 2k + B = \frac{1}{4} \\ 2k + B + g = \frac{1}{3} \end{cases}$ находим $g = \frac{1}{12}$. Жучка есть больше в $\frac{1}{12} \div \frac{1}{18} = 1{,}5$ раз

17. Поезд проходит мост длиной 450 метров за 45 секунд, а мимо светофора проезжает за 15 секунд. Вычислите длину поезда и его скорость.

Арифметическое решение: Поезд проходит расстояние, равное своей длине, за 15 секунд, а расстояние, большее на 450 метров, - за 45 секунд. Следовательно, 450 метров «голова» поезда проходит за 30 секунд, то есть сам поезд короче моста в два раза, а скорость поезда равна 15 м/с = 54 км/ч.

Алгебраическое решение: пусть х – длина поезда, тогда $(450 + x)/45 = x/15$, т.к. скорость одинакова; $450 + x = 3x$; $x = 225$, а скорость равна 15 м/с = 54 км/ч.

18. Ваня и Федя, вышли навстречу друг другу с постоянными скоростями. Ваня вышел из деревни Ванино в 10 утра и пришел в деревню Федино в 15 часов. Федя вышел из деревни Федино в 11 часов и пришел в деревню Ванино в 16 часов. В каком часу они встретились?

Арифметическое решение: Так как пройденной расстояние и время в пути обоих ребят одинаковое, то равны и их скорости, и за час каждый из них проходил одну пятую расстояния между деревьями. За первый час Ваня прошел одну пятую этого расстояния, а до встречи каждый из ребят прошел по две пятых. Следовательно, Ваня и Федя встретились в 13.00.

Алгебраическое решение: пусть длина пути = 1, так как пройденной расстояние и время в пути обоих ребят одинаковое пусть скорость Вани и Феди равна $\frac{1}{5}$. $t_{\text{встречи}} = \left(1 - \frac{1}{5}\right) \div \frac{2}{5} = \frac{4}{5} \div \frac{2}{5} = 2$. Следовательно, Ваня и Федя встретились в 13.00.

19. Мотоциклист и велосипедист выехали одновременно из пункта А в пункт В. Проехав треть пути, велосипедист остановился и тронулся лишь тогда, когда мотоциклисту осталось проехать треть пути до В. Мотоциклист, доехав до В, развернулся и сразу поехал обратно в А. Кто приедет раньше: мотоциклист в пункт А или велосипедист в пункт В?

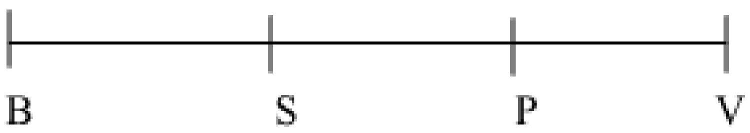
Арифметическое решение: Велосипедист проехал треть пути быстрее, чем мотоциклист – две трети пути, следовательно, его скорость составляет больше половины скорости мотоциклиста. После того как велосипедист тронулся в путь, ему оставалось проехать две трети пути от А до Б, а мотоциклисту – четыре трети такого же пути. Следовательно, раньше приедет велосипедист.

20. Король со свитой движется из пункта А в пункт В со скоростью 5 км/ч. Каждый час он высылает в Б гонцов, которые движутся со скоростью 20км/ч. С какими интервалами прибывают гонцы в пункт Б?

Арифметическое решение: Любой гонец, отправленный королем, за час удаляется от него на 15 км. Значит, расстояние между этим и следующим гонцом составляет 15 км. Скорость каждого гонца – 20км/ч, поэтому 15 км гонец проходит за 45 минут. Следовательно, гонцы будут прибывать в В через каждые 45 минут.

21. Вася и Петя, поссорившись, разбежались с одинаковыми скоростями в противоположных направлениях. Через пять минут Вася спохватился, повернул назад и, увеличив скорость, побежал догонять Петю. Во сколько раз увеличил скорость Вася, если он догнал Петю через пять минут после того, как повернул назад?

Арифметическое решение: S – место ссоры, B и P – точки, в которых соответственно находились Вася и Петя через пять минут после ссоры. За следующие 5 минут Петя пробежал расстояние, равное SP, и оказался в точке V. Следовательно, Вася должен был за это же время пробежать расстояние BV, в три раза большее, чем PV.



Пусть первоначальная скорость мальчиков равна *v*, $10v$ – расстояние между ними, когда Вася начал догонять Петю, xv – новая скорость Васи, тогда $(xv - v) \cdot 5 = 10v$; $5xv = 15v$; $x = 3$.

22. Моторная лодка плывет по течению со скоростью 28 км/ч, а против течения – со скоростью 20 км/ч. Маршрут между двумя пристанями туда и обратно лодка проделала за 6 часов. Каково расстояние между пристанями?

Арифметическое решение: Предположим, что расстояние между пристанями равно 140 (НОК (28, 20)). Тогда лодка пройдет это расстояние, двигаясь по течению, за 5 часов, а двигаясь против течения, – за 7 часов. Но 5+7=12 в два раза больше, чем 6. Следовательно, требуется уменьшить расстояние в два раза, тогда и время нахождения в пути уменьшится в два раза. Расстояние между пристанями 70.

Алгебраическое решение: пусть расстояние между пристанями равно *x*, тогда $\frac{x}{24} + \frac{x}{20} = 6$; $7x + 5x = 840; x = 70$

23. После утренней пробежки Карлсон худеет на килограмм, а к вечеру (после поедания плюшек) его вес увеличивается на треть. К вечеру третьего дня (после того как он начал бегать) Карлсон обнаружил. Что поправился вдвое. Сколько он весил до того, как начал заниматься спортом?

Алгебраическое решение: Пусть перед первой пробежкой Карлсон весил x кг, тогда после нее он весил $x-1$ кг, а к концу дня $\frac{4}{3}(x-1)$ кг. Тогда к концу третьего дня Карлсон весил $\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}(x-1)-1\right)-1\right)=2x$ откуда $x=14{,}8$

24. Три математика ехали в разных вагонах одного поезда. Когда поезд подъезжал к станции, математики насчитали на перроне 7, 12 и 15 скамеек. А когда поезд отъезжал, один из математиков насчитал скамеек в 3 раза больше, чем другой. Сколько скамеек насчитал третий?

Алгебраическое решение: Каждый из математиков в своих подсчетах учёл все скамейки на станции ровно по одному разу, то есть в итоге они насчитали равное количество скамеек. Тогда, если после отправления поезда третий математик насчитал n скамеек, то второй должен был насчитать n + 3 скамейки, а первый – n + 8 скамеек. Таким образом, $\frac{n+8}{n+3}=3$ или $\frac{n+3}{n}=3$, или $\frac{n+8}{n}=3$. Первые два уравнения не имеют натуральных корней, а решением третьего уравнения является $n=4$. Следовательно, всего на станции – 19 скамеек, а математик, о котором спрашивается в задаче, – тот, кто при подъезде к станции насчитал 12 скамеек. Значит, при отъезде от станции он насчитал 7 скамеек.

25. В классе – 17 человек. Известно, что среди любых десяти есть хотя бы одна девочка, а мальчиков больше, чем девочек. Сколько девочек в этом классе?

Арифметическое решение: Так как мальчиков в классе больше, чем девочек, то мальчиков – не менее девяти. Если мальчиков больше девяти, то не будет выполняться условие: среди любых десяти человек есть хотя бы одна девочка. Значит, мальчиков – ровно 9, а девочек – 8.

26. Леня и Паша шагают по движущемуся вниз эскалатору, не пропуская ступенек. Паша успевает сделать два шага, пока Леня делает один. Паша, пока спускался, успел сделать 28 шагов, а Леня, пока спускался, успел сделать только 21 шаг. Сколько ступенек в видимой части эскалатора?

Арифметическое решение: пока Паша не спустился с эскалатора, он всегда будет вдвое дальше, чем Леня. Когда Паша спустился, Леня сделал только 14 шагов и ему осталось преодолеть еще 14 видимых ступенек. Эти 14 ступенек он преодолел за 21-14=7 шагов. Значит за 21 шаг он преодолел 42 ступеньки – видимая часть эскалатора.

Алгебраическое решение: пусть x – количество ступенек, на которое смещается эскалатор, пока Паша делает один шаг. Тогда количество ступенек в видимой части эскалатора равно $28+28x$. Леня спускается в два раза медленнее, значит количество ступенек, на которое смещается эскалатор, пока Леня делает один шаг равно $2x$. Тогда ступенек в видимой части эскалатора – $21+42x$; $28+28x=21+42x$; $7=14x$; $x=\frac{1}{2}$. Тогда количество ступенек $28+28\cdot\frac{1}{2}=42$.

1.2 Задачи с муниципальных этапов региональной олимпиады школьников в Краснодарском крае.

27. (2011, 6.3) Вася с Машей играли в шашки (кстати, шашек в шашечной партии всего 48 – 24 белых и 24 чёрных). В какой-то момент количество Васиных шашек было больше количества Машиных шашек в полтора раза. Еще через некоторое время, когда общее количество шашек на доске уменьшилось на четыре шашки, отношение количества Васиных шашек к количеству Машиных шашек оказалось равным 4:3. Сколько теперь на доске осталось шашек?

Алгебраическое решение: Ответ: на доске осталось 21 шашка, 12 – у Васи и 9 – у Маши. Пусть в первый момент шашек на доске было 5x, во второй – 7y. Тогда, по условию, $5x - 4 = 7y$. Далее, находить x и y можно разными способами. Первый способ: перебрать все значения y от 6 до 1. Второй способ: переписать уравнение в виде $5(x + 2) = 7(y + 2)$, откуда сразу следует, что x=5, а y=3.

28. (2013, 5.3) На математическом конкурсе участники решали несколько простых и несколько сложных задач. За решение сложной задачи давалось три очка, за решение простой – 2 очка. Кроме того, за каждую нерешенную простую задачу с участника снимали 1 очко. Вася решил 10 задач и набрал 14 очков. Сколько было простых задач?

Арифметическое решение: Если бы все задачи были сложными, Вася набрал бы 30 очков. На каждой простой задаче он теряет 1 очко (независимо от того – решил он ее или не решил, т.к. за нерешенную простую он получит -1 вместо 0, а за решенную простую он получит 2 вместо 3). Значит простых задач 30-14=16.

Алгебраическое решение: пусть s – сложные решенные задачи; p - простые решенные задачи; n – простые нерешенные, тогда $s + p = 10$; $s = 10 - p$, а количество набранных очков: $3s + 2p - n = 14$; подставляя s в уравнение получаем $30 - 3p + 2p - n = 14$; $30 - p - n = 14$; $p + n = 16$, а $p + n$ это и есть все простые задачи.

29. (2013, 6.4) Имеется 50 кирпичей – красных, белых и синих. Белых кирпичей в 11 раз больше, чем синих. Красных кирпичей больше, чем синих, но меньше, чем белых. На сколько красных кирпичей меньше, чем белых?

Арифметическое решение: Количество белых и синих кирпичей должно делиться на 12. Поэтому, суммарное количество белых и синих кирпичей равно либо 12, либо, 24, либо

36, либо 48. Из всех этих вариантов подходит только 36, из них 33 белых и 3 синих, 14 красных. Красных меньше, чем белых на 19.

Алгебраическое решение: пусть количество красных, синих и белых кирпичей будет равно соответственно k, s и b; $b = 11s$, $k + s + b = 50$; $s + 12b = 50$; $s = 50 - 12b$, перебирая b от 1 до 4, находим количество красных, синих и белых кирпичей и ответ на вопрос задачи.

30. (2014, 7.2) Из пункта А в пункт Б отправились одновременно по одной и той же дороге два пешехода. Первый шел половину времени со скоростью 6 км/ч, а вторую половину времени – со скоростью 5 км/ч; второй шел половину пути со скоростью 6 км/ч, а вторую половину пути со скоростью 5 км/ч. Кто из них раньше добрался до пункта Б? Обоснуйте свой ответ.

Арифметическое решение: Первый пешеход. Первый шел больше половины пути со скоростью 6 км/ч, а второй — ровно половину, следовательно, первый затратил меньше времени.

Алгебраическое решение: т.к. время первого пешехода на обоих участках пути было одинаковым, то $\frac{6+5}{2} = 5{,}5$ – средняя скорость первого пешехода. Пусть $2x$ весь путь, тогда время первого пешехода равно $\frac{2x}{5{,}5} = \frac{4x}{11} = \frac{120x}{330}$, время второго равно $\frac{x}{6} + \frac{x}{5} = \frac{11x}{30} = \frac{121x}{330}$. Первый пешеход затратил меньше времени.

31. (2016, 5.4) Если бы школьник купил 11 тетрадей, то у него осталось бы 500 рублей. А на 15 тетрадей у него не хватает 700 рублей. Сколько денег было у школьника?

Арифметическое решение: Так как после покупки 11 тетрадей у ученика остается 500 рублей, а для покупки 15 тетрадей у него не хватает 700 рублей, то 4 тетради стоят 500 + 700 = 1200 (рублей). Тогда одна тетрадь стоит 300 рублей. Следовательно, у школьника было 11 · 300 + 500 = 3800 рублей.

Алгебраическое решение: пусть x – стоимость одной тетради, тогда $11x + 500 = 15x - 700; x = 300$. Следовательно, у школьника было 11 · 300 + 500 = 3800 рублей.

32. (2016, 6.3) В рыбоводческом хозяйстве для приближенного определения количества рыбы в пруду выловили и пометили 90 рыбин, а затем выпустили их обратно в пруд. Через несколько дней при следующем отлове рыбы среди пойманных 450 рыбин помеченными оказались две. Подсчитайте, сколько всего рыбин в этом пруду (помеченная рыба равномерно распределяется среди остальных).

Арифметическое решение: Так как из 450 рыбин помеченными оказалось 2 рыбины, то есть каждая 225-я, то всего рыбин в хозяйстве было 90 · 225 = 20250 рыбин

33. (2016, 7.3) Из пунктов А и В одновременно выехали навстречу друг другу велосипедист и мотоциклист. Через 30 минут велосипедисту оставалось проехать 3 км до середины пути. Мотоциклист же через 20 минут после начала движения уже отъехал на 2 км от середины пути. Через какое время после начала движения произошла их встреча?

Алгебраическое решение: Пусть скорости велосипедиста и мотоциклиста x км/ч и y км/ч соответственно. Так как за полчаса велосипедист проехал менее половины пути на 3 км, а мотоциклист за ⅓ часа проехал более половины пути на 2 км, то получим уравнение:

$0{,}5x + 3 = \frac{1}{3}y - 2.$

Выразим из данного уравнения

$y = 1{,}5x + 15.$

Пусть время движения до встречи t ч. Тогда расстояние между пунктами А и В равно

$(x + y) \cdot t = (2{,}5x + 15) \cdot t.$

Найдем расстояние АВ иначе: так как 0,5x + 3 составляет половину АВ, то АВ равно x + 6 (км). Из уравнения

$$(2{,}5x + 15) \cdot t = x + 6$$

находим искомое время:

$t = \dfrac{x+6}{2{,}5x+15} = \dfrac{x+6}{2{,}5(x+6)} = \dfrac{1}{2{,}5} = \dfrac{2}{5}$ (ч) $= 24$ (мин).

34. (2017, 6.4) Малыш подарил Карлсону большую коробку конфет. Карлсон съел все конфеты за три дня. В первый день он съел 0,2 всей коробки и еще 16 конфет. Во второй день – 0,3 остатка и еще 20 конфет. В третий день – 0,75 остатка и последние 30 конфет. Сколько конфет было в коробке?

Алгебраическое решение: пусть x – число конфет, которое было в коробке. В первый день было съедено $(0{,}2x + 16)$ конфет; во второй и третий дни было съедено $(0{,}8x - 16)$ конфет. Во второй день было съедено $(0{,}3(0{,}8x - 16) + 20) = (0{,}24\,x + 15{,}2)$ конфет; в третий день осталось $(0{,}56x - 31{,}2)$ конфет. Так как в третий день было съедено 0,75 остатка и ещё 30 конфет, то остаток будет составлять 120 конфет. Получаем уравнение $0{,}56x - 31{,}2 = 120$, откуда находим $x = 270$.

Арифметическое решение: так как в 3-ий день Карлсон съел 0,75 остатка и последние 30 конфет, значит 30 конфет – это четверть остатка, следовательно, остаток после второго дня равен 120. Во второй день он съел 0,3 от остатка после первого дня и у него осталось $120 + 20 = 140$ конфет, которые составляют 0,7 остатка после первого дня, значит, после первого дня осталось $140 : 0{,}7 = 200$ конфет. Рассуждая аналогично, получаем, что в коробке первоначально было $(200 + 16) : 0{,}8 = 270$ конфет.

35. (2017, 6.5) 109 яблок разложено по пакетам. В одних пакетах – по x яблок, а в других – по 3 яблока. Найдите все возможные значения x, если всего пакетов – 20 (пустых пакетов не должно быть).

Арифметическое решение: если бы в каждом пакете было по 3 яблока, то всего яблок было бы 60, но на самом деле яблок было на 49 больше. Значит, «лишние» яблоки надо распределить поровну по некоторым пакетам. Так как $49 = 7 \cdot 7 = 49 \cdot 1$ и всего пакетов – 20, то либо в 7 пакетах содержится по 7 «лишних» яблок, либо в одном пакете – 49 «лишних» яблок. В первом случае $x = 10$, во втором случае $x = 52$.

Алгебраическое решение: пусть a - количество пакетов по x яблок, b – количество пакетов по 3 яблока, тогда $\begin{cases} a + b = 20 \\ ax + 3x = 109 \end{cases}$; $b = 20 - a$, тогда $ax + 60 - 3a = 109$; $ax = 49 + 3a$; $x = \frac{49}{a} + 3$, так как x, a – целые числа, то a может быть равно 49, 7 и 1. 49 не подходит по условию общего количества пакетов, а из $a = 7$ и $a = 1$, находим $x = 10$ и $x = 52$.

Глава 2. Занятие «Знакомство с арифметическим методом», 5 и 6 классы.

Листок.

0.1 Вася нашел на 36 грибов больше, чем Лена. По дороге домой сестра стала просить Васю: «Дай мне несколько грибов, чтобы у меня стало столько же грибов, сколько и у тебя!». Сколько грибов должен брат отдать Лене.

0.2 На скотном дворе гуляют гуси и поросята. Петя сосчитал количество голов, их оказалось 30, потом сосчитал, сколько всего ног, их оказалось 84. Сколько гусей и сколько поросят было на скотном дворе?

0.3 На поляне паслись ослы. К ним подошли несколько мальчиков. «Сядем на ослов по одному», - предложил старший. Двум мальчикам ослов не хватило. «Попробуем сесть по двое», - снова предложил старший. Тогда один осел остался без седока. Сколько ослов и сколько мальчиков было на поляне?

0.4 Для покупки порции мороженного Пете не хватает семи копеек, а Маше – одной копейки. Тогда они сложили все имеющиеся у них деньги. Но их тоже не хватило на покупку даже одной порции. Сколько стоила порция мороженного?

1. Если из одной стопки тетрадей переложить в другую стопку 10 тетрадей, то тетрадей в стопках станет поровну. На сколько больше тетрадей в первой стопке, чем во второй?
2. Для покупки восьми шоколадок Тане не хватит 20 рублей. Если же она купит пять шоколадок, то у нее останется 100 рублей. Сколько денег у Тани?
3. Для покупки альбома Маше не хватило 2 копейки, Коле – 34 копейки, а Васе – 35 копеек. Тогда они сложили свои деньги, но их все равно не хватило на покупку одного альбома. Сколько стоит альбом?
4. Когда отцу было 27 лет, сыну было 3 года, а сейчас сыну в три раза меньше лет, чем отцу. Сколько лет сейчас каждому из них?
5. Пес и кот одновременно схватили зубами батон колбасы с разных сторон. Если пес откусит свой кусок и убежит, коту достанется на 300 грамм больше, чем псу. Если кот откусит свой кусок и убежит, псу достанется на 500 г больше, чем коту. Сколько колбасы останется, если оба откусят свои куски и убегут?
6. В комнате стоят стулья и табуретки. У каждой табуретки – 3 ножки, у каждого стула – 4 ножки. Когда на всех стульях и табуретках сидят люди, то в комнате всего 39 ног и ножек. Сколько стульев и сколько табуреток в комнате?

7. Если бы школьник купил 11 тетрадей, то у него осталось бы 500 рублей. А на 15 тетрадей у него не хватает 700 рублей. Сколько денег было у школьника?
8. При сложении двух целых чисел Коля поставил лишний ноль на конце одного из слагаемых и получил в сумме 6641 вместо 2411. Какие числа он складывал?
9. На математическом конкурсе участники решали несколько простых и несколько сложных задач. За решение сложной задачи давалось три очка, за решение простой – 2 очка. Кроме того, за каждую нерешенную простую задачу с участника снимали 1 очко. Вася решил 10 задач и набрал 14 очков. Сколько было простых задач?

Задачи с номером 0. – для совместного обсуждения и разбора.

Задачи 1-9 – для самостоятельного решения.

Статистика решения задач

5 класс

Присутствовало 8 человек

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Количество решивших	7	6	4	3	0	1	3	0	0

Используемые методы решения:

- Задачи 1-3 были решены арифметическим методом
- Задача 4 решена арифметическим методом и методом перебора
- Задача 5 не решена самостоятельно
- Задача 6 решена перебором
- Задача 7 решена арифметическим методом
- Задачи 8 и 9 не решены самостоятельно

6 класс

Присутствовало 10 человек

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Количество решивших	8	7	5	5	4	4	4	3	2

Используемые методы решения:

- Задачи 1-3 были решены арифметическим методом
- В задаче 4 и 5 среди решений преобладал алгебраический метод

- Задача 6 решена перебором
- Задача 7 решена арифметическим методом
- Задача 8 решена арифметическим методом и перебором
- Задача 9 решена арифметическим и алгебраическим методами

Заключение

В работе удалось изучить большое количество задач и найти разные способы их решения. Анализ олимпиад муниципального уровня показал, что от учащихся уже в младшем возрасте требуется уверенное владение алгебраической техникой. Некоторые задачи решать арифметическими методами не целесообразно. Сами школьники на занятиях уже в начале 5 класса показывают стремление использовать уравнения для решения текстовых задач, хотя и не обладают большим опытом их составления и решения. В 6 классе это стремление становится более ярко выраженным. При решении задач у них в первую очередь возникает желание «обозначить что-нибудь за х». После знакомства с арифметическим методом, многие школьники начали по-другому смотреть на текстовые задачи и решать некоторые более эффективно. Таким образом, можно сделать вывод, что для успешного решения задач школьники должны научиться в равной степени хорошо владеть и арифметическими и алгебраическими приемами. Сборник текстовых с задач с коллекцией различных решений призван помочь в достижении этой цели.

Список литературы

1. Чулков П.В. Арифметические задачи. – М.:МЦНМО, 2015. – 64 с.
2. Электронная коллекция задач. URL: http://www.problems.ru/
3. Кружок А.В. Спивака для 6-7 классов. URL: http://mmmf.msu.ru/archive/19992000/spivak67/
4. Cdodd.ru методическая копилка, муниципальные этапы ВОШ по математике
5. Арнольд И. В. Принципы отбора и составления арифметических задач. — М.: МЦНМО, 2008.
6. Н.А. Шкильменская. Зачем решать задачу разными способами. URL: http://school2100.com/upload/iblock/b60/b60a8e9a20a21da6cd19963826f18217.pdf